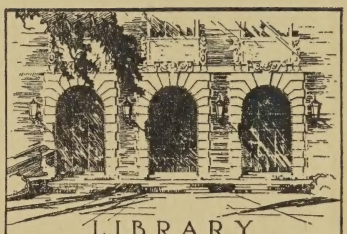


LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF ILLINOIS

513.21
M37gG
516.184
M37g G
1825

MATHEMATICS

The person charging this material is responsible for its return to the library from which it was withdrawn on or before the **Latest Date** stamped below.

Theft, mutilation, and underlining of books are reasons for disciplinary action and may result in dismissal from the University.

To renew call Telephone Center, 333-8400

UNIVERSITY OF ILLINOIS LIBRARY AT URBANA-CHAMPAIGN

~~MAY 2 5 1982~~

June 23, 1982

JUL 1 2 REC'D

L161—O-1096

L. Mascheroni's

Gebrauch des Zirkels

aus dem

Italiänischen in's Französische übersetzt

durch

Herrn A. M. Carette.

In's Deutsche übersetzt, vermehrt mit der

Theorie

vom

Gebrauch des Proportionalzirkels

und

mit einer Sammlung zur Uebung von mehr denn 400 rein geometrischen Sätzen

von

J. P. Gruson.

(Mit 18 Kupfertafeln.)

Berlin,

in der Schlesingerschen Buch- und Musikhandlung.

1825.

Berlin,
gedruckt bei A. Petsch.

516.184
M379:G
1825

Vorrede des Uebersetzers.

Durch die Uebersetzung dieses in seiner Art höchst originalen Werks des verstorbenen Mascheroni erfülle ich bloß den schon öfters von Gelehrten des Fachs öffentlich ausgesprochenen Wunsch. — Einzelne Sätze ließen sich wohl einfacher beweisen, als von dem Erfinder dieser Auflösungen geschehen ist. Es wird dem geübten Leser nicht schwer werden, diese kürzeren Beweise selbst aufzufinden, und es darf als eine sehr gute Uebung empfohlen werden. Die Vorrede des Erfinders überhebt mich, mehr über das Eigenthümliche des Werks hinzusetzen.

Eine kurze aber doch vollständige Theorie vom Gebrauch des Proportionalzirkels habe ich folgen lassen, weil es noch sehr viele giebt, die durch Construktionen suchen wollen, was die Rechnung ihnen bequemer und genauer geben würde.

In dem folgenden Anhang gebe ich über 400 geometrische Aufgaben und Lehrsätze, die ich so geordnet habe, daß ihre rein geometrischen Auflösun-

45081

gen und Beweise aus den Sätzen in den von mir angegebenen Abschnitten meines systematischen Leitfadens, Berlin 1822 bei gehöriger Fertigkeit gefunden werden kann. Es kommen allerdings viele für Anfänger schwierige und neue Sätze vor; ich verweise deshalb zur Auffindung ihrer Beweise auf meine Geometrie nach Erzeugung der Begriffe, Berlin 1820, auf meine Uebersetzung von Leslies geometrischer Analysis, und besonders auf meine daselbst befindlichen Zusätze. Durch diese Aufgaben und Lehrsätze wird ein schon oft gefühltes Bedürfniß, eine beträchtliche Sammlung von rein geometrischen Sätzen zur Uebung zu haben, abgeholfen sein. Zugleich wird diese Sammlung, die man noch um das Zehnfache vermehren könnte, belehren, wie groß der Reichthum der bloßen reinen Geometrie ist, wie viel man von dem, der sich rühmt, auch nur die reine elementare Geometrie inne zu haben, fordern darf, und wie wenige sich einer ernsten strengen Prüfung darin unterwerfen dürfen. Ich werde mich glücklich schätzen, wenn ich durch meine Schriften zur mehreren Ausbreitung der noch immer nicht genug geschätzten mathematischen Wissenschaften beigetragen habe. Berlin, den 1sten Mai 1825.

Gruson.

Vor-

Vorrede des Verfassers.

Sollte man nicht, da täglich so herrliche Entdeckungen beim Fortschritte in der Mathematik gemacht werden, sollte man nicht, zurückgehend auf ihre erste Spur, irgend einen noch unbekannten Fleck in ihrem ungeheueren Gebiete auffinden können? Das war der erste Gedanke, welcher mich zu dem Versuche bewog, die neue Bahn der Geometrie des Zirkels einzuschlagen. Bisher hat man in der Geometrie für die einfachsten Auflösungen diejenigen gehalten, welche nur des Lineals, oder der einfachsten, d. h. der geraden Linie, und des Zirkels, oder der einfachsten krummen Linie, des Kreises bedurften. Diesen beiden Hebeln aller Aufgaben (wenn ich mich so ausdrücken darf), welche eine Zeit lang die Elementar-Geometrie ausmachten und bestimmten, fügte man später die krummen Linien des Kegels hinzu, denen die krummen

Linien, die über den zweiten Grad hinaus gehen, und die verschiedenen Arten der Transcendenten folgten.

Durch diese tiefen Untersuchungen, aufs Neue unterstützt durch die Analysis des Endlichen und Unendlichen, wuchs fortdauernd die Herrschaft der Geometrie bis zu einer solchen Ausdehnung an, daß die Erfindungen, welche anfangs die Bewunderung der Alten auf sich gezogen, und die Verehrung eines Thales und Pythagoras verdient hatten, das Erbtheil der Kinder unserer Zeit geworden sind. Ich sagte zu mir selbst: solltest du nicht, die Begrenzungslinie zurückschreitend, bis zu den Elementen zurückkehren und aufsuchen können, ob bisher nichts als vernachlässigt zurückgeblieben ist? Ist es wirklich wahr, daß die Elementar-Aufgaben des Euclid von der möglichst einfachen Construction sind? Sollte man das mathematische Element nicht in seine Ur-Elemente, das Lineal und den Zirkel, zerlegen können, nach dem Vorgange derer, welche das Wasser in zwei Gasarten, und die bis jetzt als einfach betrachtete Luft in zwei andere Bestandtheile zerlegt haben?

Weil nun das Lineal allein nur zum Ziehen einer geraden Linie dienen kann, so gerieth ich auf

den Einfall, man könnte vielleicht den Zirkel allein gebrauchen, nicht nur, um einen Kreis, einen Bogen zu beschreiben, sondern auch, indem man damit mehrere dergleichen von verschiedenen Mittelpunkten aus und mit verschiedenen Oeffnungen beschreibt, mit Hülfe dieser wechselseitigen Kreisdurchschnitte mehrere zweckdienliche Punkte, und genau die Lage der in irgend einer Aufgabe gesuchten Punkte zu finden. Ich habe bisher bemerkt, daß dieses Feld noch von keinem Mathematiker angebaut worden, und daß die Auflösungen dieser Gattung, zufällig durch den Zirkel allein erhalten, durch ihre Construktion mehr elementar gewesen wären, als alle anderen.

Zwei Gründe jedoch ließen mich eine Zeit hindurch anstehen, dieses Werk zu unternehmen, aus Furcht, meine Bemühungen möchten, indem ich jenes Mittel anwendete, vergeblich sein; einmal sah ich nicht klar genug, was dabei herauskommen würde, mit dem Zirkel allein Punkte zu finden, welche Andere mit der Vereinigung des Zirkels und des Lineals gefunden haben. Dann fürchtete ich, meine Versuche dürften nicht von dem gehofften Erfolge gekrönt, und meine Arbeit alsdann gänzlich verloren sein. Die mit dem Zir-

kel allein gemachten Conſtruktionen zur Beſtimmung der Punkte in der Elementar-Geometrie konnten noch weit verwickelter ſein, als die ſchon gekannten, wo man überdem noch das Lineal gebrauchte. So würde es meiner Theorie an ſchöner Gediegenheit, meiner Praxis an Genauigkeit gefehlt haben, und ſo war ich nahe daran, mein Vorhaben aufzugeben.

In ſolcher Ungewißheit ſchwankend, las ich von Ungefähr die Art und Weiſe wieder durch, nach welcher Graham und Bird in England ihre großen aſtronomiſchen Kreis-Quadranten theilten. (Encyclopédie methodique: Article quart de cercle mural.) Der von Graham für die Sternwarte zu Greenwich gemachte hat nicht allein dem größten Theile der zeither gemachten als Muſter gegolten, ſondern auch durch ſeine Genauigkeit verdient, von den Aſtronomen als einer der beſten bis auf die von Ramsden betrachtet zu werden. Ich erfuhr nun, daß die Eintheilung dieſer berühmten Maſchine nur mittelſt des Zirkels ohne Lineal gemacht war. Nichts iſt anziehender, als die Beſchreibung der von jenem Künſtler bei dieſem weitſchichtigen und ſinnreichen Verfahren angewandten Mittel. Ich werde hier nicht auf die Erklärung

der Beweggründe eingehen, durch welche das Lineal ausgeschlossen wurde. Leicht werden diejenigen sie merken, welche sich auf Arbeiten dieser Art verstehen. Um im Allgemeinen das Ueberwiegende bei dem Gebrauch des Zirkels von dem des Lineals zu beweisen, wenn es darauf ankommt, Linien mit solcher Genauigkeit zu beschreiben, daß sie auch vor dem Vergrößerungsglase bestehen können, reicht es hin, zu sagen, daß es bei einem noch so wenig langen Lineal fast unmöglich ist, die Genauigkeit aller Punkte, welche man zieht, zu verbürgen; so schwer ist es, daß es strenge genommen in seiner ganzen Länge gerade sei. Wär' es nun auch äußerst gerade, so wissen doch alle Praktiker, daß der Strich einer Linie, längs dem Lineal gezogen, eine Unsicherheit des Parallelismus mit sich bringt in der Bewegung der Axe der zeichnenden Spitze, oder des vollkommenen Anhaltens dieser Spitze an die Kante des Lineals. Diesen beiden Uebelständen ist der Zirkel nicht unterworfen. Genug, wenn seine Oeffnung fest, und seine Spitzen sehr fein sind. Indem man die eine in einen als Centrum angenommenen Punkt setzt, beschreibt die andere einen Bogen so scharf, als möglich.

Während ich die Beschreibung der Methode

Grahams las, bemerkte ich, daß er vier Schwierigkeiten begegnete.

Die erste, daß er genöthigt war, versuchsweise zu verfahren. Indem er wirklich von einem Bogen von sechzig Graden spricht, den er mittelst des Halbmessers bestimmte, sieht man, daß alle seine Untereintheilungen nach Versuchen geschahen. Die Alten haben uns nur das Mittel gelassen, den Umkreis mit dem Zirkel in sechs gleiche Theile zu theilen, wie es gezeigt und bewiesen wird im 15ten Satze des 4ten Buchs der Elemente Euclids. Graham konnte also nur für Einen Punkt geometrische Genauigkeit erhalten.

Der zweite Uebelstand war der Zeitverlust, welchen selbst die geschicktesten in ihren Versuchen nicht würden vermeiden können.

Der dritte war, zwei ebene Flächen gebrauchen zu müssen; eine für die Versuche, und eine andere, auf welcher der Viertelkreis selbst war, auf den er die Endergebnisse übertrug. Dies that er, um durch die Versuche auf dem Viertelkreise die Oberfläche des Limbus nicht zu verderben.

Endlich die vierte Unbequemlichkeit war, zwei verschiedene Eintheilungen durchführen zu müssen, da die Eintheilung des Viertelkreises in 90° die Unter-

eintheilungen in 3 und 5 Theile mit sich brachte, und weil die Versuche mit denselben unvollkommen waren durch die große Zahl unvermeidlicher Irrthümer, so wollte er eine andere der ersten sich nähernde Eintheilung des nämlichen Viertelkreises versuchen, welche den Bogen nur durch Halbirungen zerlegte. Er theilte daher den Bogen von 60° in zwei gleiche Theile, und hatte den Bogen von 30°; dadurch war der Viertelkreis in 3 gleiche Theile getheilt, mit den Untereintheilungen durch 2 erhielt man nachher den 6ten, den 12ten Theil, bis endlich das Viertel in 96 gleiche Theile getheilt blieb. Diese Eintheilung verdiente das meiste Zutrauen; aber die andere in 90°, welche unmittelbar den Astronomen dienen sollte, ward mit der ersteren verglichen, und durch eine zu diesem Zweck berechnete Tafel berichtigt.

Alle diese Schwierigkeiten vermochten ohne Zweifel Bird, seine Zuflucht zu einer andern Methode zu nehmen, seine Viertelkreise einzutheilen. Sie bestand darin, die Bogen durch ihre Sehnen zu bestimmen, welche er auf einen in gleiche Theile getheilten Maßstab trug. Dennoch war sie nicht frei von Mängeln, da ihr sowohl geometrische Genauigkeit fehlte, als auch der Viertelkreis nothwendig die

Unrichtigkeiten hatte, welche sich auf dem Maßstabe fanden.

Die Wichtigkeit der astronomischen Instrumente ließ mich meinen Entwurf einer Geometrie des Zirkels von einem günstigeren Standpunkte aus betrachten. Ich fing an zu glauben, daß ich viel gethan haben würde, wenn es mir glücken sollte, den Umkreis in mehr als 6 gleiche Theile durch den Zirkel allein zu theilen. Ich würde den Künstlern, welche an astronomischen Instrumenten arbeiten, einen um so bedeutendern Dienst geleistet haben, da meine Untereintheilungen des Umkreises ausgedehnter und der Eintheilung des Viertelkreises in 90° angemessener gewesen wären. Ich lieferte alsdann jenen Mechanikern ein Mittel zu geometrischer Genauigkeit in ihren Theilungen. Ich ersparte ihnen die Zeit der Versuche, die Nothwendigkeit, zwei Theilungen auf einmal und auf zwei verschiedenen Ebenen vorzunehmen, und vor allen machte ich den Gebrauch des Maßstabes unnütz, für dessen von aller geometrischen Strenge entfernte Genauigkeit man nie bürgen kann. Nur die einzige Besorgniß blieb mir noch, meine neue Methode möchte zu verwickelt, zu lang, und daher unbequem für die Praxis sein.

Dessen ungeachtet legte ich Hand an's Werk.

Da ich einsah, daß ich von der Anwendung der Algebra auf die Geometrie wenig erwarten durfte, so nahm ich meine Zuflucht zu andern rein geometrischen Mitteln. Ich gebe sie hier nicht an, da ich in dieser neuen Bahn nicht immer demselben Wege gefolgt bin, und Vieles dem Zufall verdanke. Oft fand ich das Resultat, was ich suchte, nur nach manchen, von einander abweichenden, Versuchen.

Ich überlasse Andern die Sorge, die Kette zu untersuchen, welche die Aufgaben dieser neuen Theorie unter einander verknüpft. Vielleicht gelingt es ihnen, dem Faden zu folgen, der systematisch von einer zur andern überführt, und der, wäre er gleich anfangs entdeckt, die Erfindung der Geometrie des Zirkels verkürzt und erleichtert hätte.

Vor zwei Jahren übersandte ich den ersten Versuch meiner Unternehmung dem Bürger Annibal Beccaria, mit einem Briefe, welchen ich in das Journal von Brugnatelli einrücken ließ. Dieser treffliche Künstler, damals Mailändischer Patricius, seitdem Mitglied des Gemeinderathes und des Ausschusses für öffentlichen Unterricht dieser Stadt, vereinigt mit dem Ruhme, Bruder des berühmten Verfassers des Buches, über Verbrechen und Strafen, zu sein, den ihm eigenthümlichen, mit

der größten Geschicklichkeit die schwierigsten und feinsten mathematischen Instrumente zu fertigen.

Mein erster Versuch bestand in der Methode, den Kreisumfang durch einen außer ihm angenommenen Punkt in 24 Theile zu theilen. Die Ausführung dieser Theilung ist die einfachste, die man erwarten darf, und ich habe sie in diesem Werke beibehalten. Die, welche ich in 120 Theile gemacht hatte, war zu verwickelt. Ich habe dafür eine weniger lange gefunden, welche ich sogar für die möglichst kurze halte. Noch hatte ich eine leichte Construktion hinzugefügt, die Quadratwurzeln von Eins bis 10 zu finden, und habe auch diese beibehalten.

Ich habe die übrigen in diesem Briefe aufgestellten Aufgaben fortgelassen, weil sie zu verwickelt oder von einer unzulänglichen Näherung waren. Seitdem, wie man sich überzeugen wird, bin ich dahin gekommen, den Umkreis sehr schnell in 240 Theile mit geometrischer Genauigkeit durch den Zirkel allein und durch drei Punkte außerhalb desselben Kreisumfanges zu theilen. Jeder dieser Theile beträgt $1\frac{1}{2}$ Grad der bisher üblichen Theilung in 360°. Ich halbire jeden Bogen geometrisch durch Näherung. Ich theile den Kreisumfang nur durch 3 Punkte in

Grade und Viertelgrade, ohne auch nur um den sechsten Theil einer Secunde zu fehlen.

Mit denselben Punkten theile ich ihn in Minuten, ohne in weniger als einer Secunde zu irren. Ich schmeichle mir, daß die Astronomen mit dieser Genauigkeit sich begnügen könnten, weil ich selbst unter den berühmtesten Künstlern von keinem weiß, der darüber hinausgegangen wäre.

Jedoch glaubte ich noch nicht genug gethan zu haben, wenn meine neue Theorie nicht zugleich auch der neuen Zirkeleintheilung diente.

Es ist bekannt, daß die Franzosen, welche die ersten Geometer besitzen, endlich nach ihren Berathungen für alle Künste einzig die von den Gelehrten so sehr gewünschte Decimaleintheilung angenommen haben.

Gewiß werden Vorurtheile und die Gewalt der Trägheit dieser Eintheilung in anderen Ländern große Hindernisse in den Weg legen, aber, wo man die Wissenschaften liebt, wo ein weit umfassendes Handelsinteresse ist, da wird sie sich zuletzt unerschütterlich festsetzen. Die Verwandlung der von allen Nationen gebrauchten Eintheilung des Kreisumringes in 360 Grade und der Untereintheilung in 60 Theile war eine der schwierigsten wegen der ermüdenden und

doch nothwendigen Arbeit, die trigonometrischen Tafeln in ein neues System umzuschmelzen: aber die Kraft einer großen sich wieder gebärenden Nation kennt keine Hindernisse. Wenn der Kreisumring 400 Theile oder Grade hat, so ist der Viertelkreis, die Grundlage der Trigonometrie, in 100 Theile, jeder derselben wieder in 100 andere getheilt, und so fort.

Die Tafeln der natürlichen und künstlichen Sinus dieser Eintheilungen und Untereintheilungen sind schon berechnet und gedruckt. Damit aber der Genauigkeit der Zahlen an Dauerbarkeit und Sicherheit nichts fehle, hat man in Frankreich unternommen, sie mit in Blei abgegossenen Schriftzeichen zu drucken. Schon hat man diese Tafeln nach der neuen und sinnreichen, sogenannten stereotypischen, Methode Firmin Didot's.

Eine Gesellschaft geschickter Rechner fertigt unter der Leitung des berühmten Prony noch andere ausgedehntere Tafeln mit einer größeren Anzahl von Decimalstellen. Alle diese Umstände bewogen mich, eine gewisse Näherungs-Methode zu suchen, um den Kreisumring in diese neuen Grade und deren Theile zu theilen. Ich bin so glücklich gewesen, nur mit drei Punkten und sehr wenig Zirkelöffnungen diese

neue Decimaleintheilung des Umkreises, ohne Fehl auch nur in einer Secunde, zu erhalten.

Hätte ich auch nichts weiter, als das eben Gesagte, gethan, so würde dies schon zur Empfehlung des Gebrauches des Zirkels allein hingereicht haben. Aber beim Fortschreiten fand ich, daß man jede Aufgabe der Elementargeometrie mit diesem Instrumente allein auflösen könne, in dem Sinne nämlich, daß der Zirkel ausreicht, die in der Aufgabe geforderten Punkte für die Lage und Bestimmung der benöthigten geraden Linien zu finden. Das ging die Theorie an. Ich wollte den Gegenstand erschöpfen, alle Elemente für alle möglichen Fälle geben, und beweisen, daß man mit dem Zirkel allein alle Punkte finden kann, welche Euclid und die anderen Schriftsteller der Elementargeometrie mit Hülfe des Lineals und Zirkels finden lehren.

Obgleich alle Elementaraufgaben, mit dem Zirkel allein gelöst, keine ganz einfache Auflösung haben, so wage ich doch zu sagen, daß der größte Theil der nothwendigsten kurz und einfach genug gelöst ist, um die Praktiker zu bewegen, die Beihülfe des Lineals zu verwerfen, und sich nur des Zirkels zur Auffindung der Grundpunkte zu bedienen. Die Mittel, welche ich in diesem Buche vorschlage, werden meine

Behauptung rechtfertigen. Ich werde hier nicht alle ähnlichen Aufgaben anführen, welche mir als wichtig erscheinen. Nur folgende.

Sucht man mit dem Zirkel den Mittelpunkt eines Kreises, so wird man ihn schnell ohne Mühe finden, wie auch die dritten, vierten, und folglich auch die mittlern Proportionalen. — Man könnte auch mit dem Zirkel allein reguläre in dem Kreise oder um denselben beschriebene Vielseite construiren [1]). Auch wird der Zirkel allein ausreichen, die Quadratwurzeln der Zahlen zu finden, die Flächen der Quadrate, der Zirkel und ähnlicher Figuren zu verdoppeln und zu vervielfältigen. Mit geometrischer Genauigkeit wird man alle diese Aufgaben lösen, da ihre Natur sie dazu fähig macht. Man wird ferner durch Näherung eine dem Kreisumringe gleiche Länge finden, oder einen dem Halbmesser gleichen Bogen, oder ein dem Kreise gleiches Quadrat, oder einen dem Quadrate gleichen Kreis, oder eine dem Cubus gleiche Kugel, oder einen Cubus, welcher das Doppelte, das Drei- oder Vierfache eines anderen ist. Alle diese Aufgaben wird man mit Anwendung der Bo-

[1]) Die Militäringenieure konnten hier Manches ihren Arbeiten Nützliche finden.

genschnitte lösen können, oder indem man immer mit dem Zirkel allein, die Länge der Seiten oder der Halbmesser bestimmt, deren man für die verlangten Figuren bedarf.

Das ist im Kurzen die Grundlage der Geometrie des Zirkels, welche ich dem Publikum vorlege. In den Beweisen habe ich mich, so viel ich konnte, der Geometrie der Alten bedient, welches mir der Natur meiner Aufgaben gemäßer und kürzer schien. Ueberall, wo das geometrische Verfahren zur Erlangung des Resultats zu lang ward, gebrauchte ich die Rechnung, und so habe ich zugleich nach Kürze, nach lichtvoller Klarheit und Gefälligkeit, so viel wie möglich, gestrebt.

Ich habe Euclid angeführt, diesen in den Grundlehren so großen Meister. Die Zahl der angeführten Sätze ist nach Tacquet, weil dessen Buch in Italien mehr verbreitet ist, als der alte Text Euclid's.

Für Künstler, welche sich mit dem Zirkel nur ergötzen wollen, habe ich im eilften Buche mehrere unterhaltende Aufgaben aus Pappus, Ozanam, Simpson und anderen Verfassern ausgezogen. Das ist Alles, was ich meinen Lesern über die Geometrie des Zirkels zu sagen habe. In Bezug auf

die Construktion ihrer Aufgaben ist sie die einfachste und gründlichste, welche man wünschen kann, und übrigens weiß ich nicht, daß dieser Gegenstand schon von irgend Jemand bis jetzt wäre behandelt worden.

Geo-

Geometrie des Zirkels.

Erstes Buch.

Vorerinnerungen.

§. 1. Ich nenne Geometrie des Zirkels diejenige, welche vermittelst des Zirkels allein, ohne Hülfe des Lineals, die Lage der Punkte bestimmt.

Es seien z. B. zwei Punkte A u. E gegeben, (Fig. 1.) Sucht man nun den dritten P. D, der eben so weit von jenen entfernt ist, als sie unter sich, so beschr. man mit einer dem Halbm. AE gleiche Entf. und aus dem P. A u. E als Mittelpunkt die beiden Kr. EDB u. ADV, welche sich im Punkte D schneiden; dann wird der P. D der gesuchte sein, weil er von den P. A u. E so weit entfernt ist, als A von E.

(Satz 1. Buch 1. der Elem. des Euklides.) Dieser P. D ist sonach allein mit dem Zirkel, ohne Hülfe des Lineals gefunden.

§. 2. Nun kann es geschehen, daß man die Lage eines P. mit dem Zirkel allein findet; aber um den Satz zu beweisen, hat man das Lineal zur Constr. der Fig. nöthig.

Es seien z. B. zwei P. A u. B (Fig. 2.) gegeben, die in einer bestimmten zur Einheit d. h. =1 genommenen Entf. von einander liegen, und sucht man einen P. D, der von B die Entf. BD = $\sqrt{3}$ hat, so wird die Aufg. folgender Gestalt gelöst.

Aus dem Mittelp. A und mit einem Halbm. AB sei der Kr. BCD beschrieben; und trage demselben Halbm. auf der Periph. von B nach C u. von C in D, so ist D der gesuchte und ohne Hülfe des Lineals gefundene Punkt.

Jedoch um zu beweisen, daß die Entfernung BD = $\sqrt{3}$, hat man Linien nöthig, welche man mit dem Lineal zieht.

Es sei BE der Durchm. des Kreises BCD; zieht man nun BD, DE, so ist der Tr. BDE in D rechtwinkl. (31. B. 3.), und man wird haben:

$$BD^2 = BE^2 - DE^2.$$

Aber da die Entf. BC=CD=AB ist, so wird auch DE=AB, (15. B. 4.) oder DE=1, u. BE=2 sein. Folgl. $BD^2 = 4 - 1 = 3$: woraus BD = $\sqrt{3}$; dieß sollte bewiesen werden, was aber nicht ohne Lineal geschehen konnte.

Dieser Satz ist in Euklid der 12. im 13. Buche.

§. 3. Aus der vorhergehenden Erkl. (1) ergiebt sich, daß zu der Geometrie des Zirkels alle diejenigen Aufgaben gehören, welche man vermittelst des Zirkels allein lösen kann, obgleich man sie nicht mit diesen Instrument allein würde beweisen können. So verhält es sich mit der vorhergehenden Aufg. (2.)

§. 4. Diese Geometrie kann, wie man es an den Beisp. sehen wird, von sehr großem Nutzen in der Praxis sein, um P. mit der größt möglichsten Genauigkeit und selbst weit geschwinder mit dem Zirkel allein, als mit Hülfe des Lineals zu bestimmen.

§. 5. Wir werden also die Aufg. mit dem Zirkel allein lösen, und man wird sich dann zu dem Bew. der gewöhnlichen Construction des Lineals und des Zirkels bedienen. Deshalb werden wir auf die Sätze und Bücher der Elemente des Euklides verweisen.

§. 6. Wir werden auch beim Anfange dieses Werks sehen, daß man keins von den nöthigen Elementen ausgelassen hat, um bei jeder beliebigen Aufg. mit dem Zirkel allein die P. zu bestimmen, welche bis dahin nicht anders als, mit dem Lineal und Zirkel vereint bestimmt werden konnten.

§. 7. Wir werden jedoch hier nicht alle Aufg. hersetzen: aber nachdem wir dafür die nöthigen und hinlänglichen Elemente bewiesen haben, werden wir

eine große Anzahl der wichtigsten auflösen, und hauptsächlich diejenigen, welche uns die nützlichsten oder wegen ihrer Eleganz die vorzügsten scheinen.

§. 8. Wir fügen hier nun noch zu Gunsten der Künstler, für die großen Theils dieses Werk geschrieben ist, hinzu, daß wir, überzeugt von der Wichtigkeit der Irrthümer, welche aus dem Auseinander- und Zusammengehen der Schenkel des Zirkels entspringen, um mit Bestimmtheit verschiedene Oeffnungen zu erhalten, dafür Sorge tragen werden, die Aufgaben mit der möglich kleinsten Anzahl Zirkel-Oeffnungen zu lösen. Es würde selbst besser sein, daß der Künstler zu seinem Gebrauch so viel treue Zirkel hätte, (so genannt, weil man sich darauf verlassen kann, daß sie die gegebene Oeffnung beständig behalten), als zur Aufl. der Aufg. Zirkelöffnungen erforderlich sind, da es sich oft trifft, daß wir genöthiget sind, uns mehrere Male derselben Oeffnungen zu bedienen, nachdem wir eine oder mehrere andere angewendet haben, so nehmen wir ohne einen einzigen Zirkel zu erweitern, oder zusammen zu drücken, wieder den zur Seite gelegten Zirkel, der diese Oeffnung behalten hat. Deshalb werden wir auch öfters den Zirkel den ersten, zweiten, dritten ꝛc., nach den auf einander folgenden Oeffnungen, mit welchen man die Aufg. lösen wird, nennen.

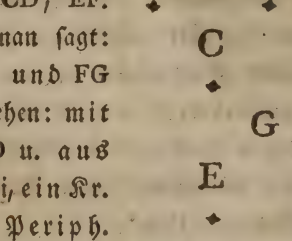
§. 9. Ueberdieß, da es bei der praktischen genauen Bestimmung der Lage eines Punkts darauf ankommt, daß die Schneidung der Linien, welche ihn bestimmen unter einem rechten Winkel oder diesem nahe geschiehet, so werden wir dieß immer, im Fall ein Bogen einen andern schneidet, unter einem rechten oder wenigstens unter einem W., der wenig davon abweicht, thun.

Um ohne Dunkelheit kurz zu sein, werden wir uns bei der Angabe der Construktion der Figur oft abgekürzter Ausdrücke bedienen, welche die bloße Ansicht der Figur bald einsehen lassen wird. Z. B. in Fig. 2 statt zu sagen:

„Mit dem Halbmesser AB, aus dem Mittelp. B,
„sei ein Bog. beschrieben, welcher die Peripherie
„BCD im P. C schneidet; und dann mit demsel-
„ben Halbm. und aus dem Mittelp. C beschreibe
„man einen Bogen, welcher dieselbe Peripherie in
„D schneidet u. s. w.," werden wir bloß sagen:
„Es sei BC = CD = AB, u. s. w."

Auch ist es hinreichend zu sagen, daß die Punkte B, C und D, mit welchen man denselben Umfang BCD anzeigt, die Punkte dieser Peripherie sind; dies kann also nicht unrichtig verstanden werden.

§. 11. Eben so, wenn z. B. drei Entf. AB, CD, EF. gegeben sind, und man sagt: „Es sei EG=CD, und FG =AB so ist zu verstehen: mit einem Halbm. CD u. aus dem Mittelp. E sei, ein Kr. beschr. in dessen Periph. der P. G liegt; und dann sei mit der Entf. AB aus dem Mittelp. F ein anderer Kreis beschr., welcher den ersten in dem Punkt G schneidet."



§. 12. Ferner werden wir in den Beweisen einige gerade Linien angeben, welche sich nicht in der Fig. befinden, indem wir die Endp. nennen, nach denen sie würden gezogen sein müssen, wie Fig. 11 die gr. AB, oder auch CD. So werden wir, wenn keine Dunkelheitrn zu befürchten, verfahren, um die Fig. sauber zu halten, und bewirken, daß die mit dem Zirkel allein gemachte Constr. besser hervortrete.

Lehnsatz.

§. 13. Wenn man aus den beiden Mittelpunkten A und B und mit den Halbmessern AP und AQ die Bogen beschreibt, welche sich in P und p, Q und q schneiden, so werden die Punkte Q, q, P, p in derselben geraden Linie liegen.

Beweis. Da alle Seiten der Triangel APp u. BPp (Fig. 3.) nach der Constr. einander gleich sind, so wird der Wink. APp gleich sein dem Wink. BPp. (8. Buch 1.)

Man beweist eben so, daß

$$APQ = BPQ.$$

Folgl. $APp + APQ = DPp + BPQ.$

Aber die Summe dieser vier W. ist gl. vier Rechten. (13. B. 1. Zus.) Daher jede der Summen der zwei W. gl. ist 2 R. Folglich ist die Linie QPp eine gr. (14. B. 1.)

Man zeigt nun auf dieselbe Weise, daß die Linie Ppq eine gr. ist. Folgl. liegen die P. Q, P, p, q in derselben gr. Linie.

§. 14. Ist alles wie im vorhergehenden §. so werden AB, Pp, so wie AB und Qq sich winkelrecht in M halbiren und $QP = qp$ sein.

Beweis. Wegen der Gleichheit der Seiten in den beiden Tr. APB und ApB, hat man

$$W.\ PAB = pAB \quad (8.\ B.\ 1.)$$

Aber man hat noch $APp = ApP$ (5. B. 1.)

Daher ist auch $AMP = AMp$ (Zus. Satz 32. B. 1.)

Folglich sind diese beiden W. R. (13. Buch 1.) und die Linie Pp wird nach dem Bew. 102. B. 1. in M halbirt sein.

Man wird auf dieselbe Weise beweisen, daß Qq

und AB in M halbirt sind. Folglich werden, wenn man von den gleichen QM u. qM, die gleichen Theile PM, pM abschneidet, die übrig bleibenden Theile QP, qp gleich sein.

§. 15. Zusatz. Man wird also haben:

$$QM^2 = AQ^2 - AM^2 \text{ (47. B. 1.)}$$

Lehnsatz.

§. 16. Wenn alles wie in 13. ist, so wird man haben

$$AQ^2 = AP^2 + PQ^2 + Pp \cdot PQ.$$

Beweis. Denn man hat

$AQ^2 = AP^2 + PQ^2 + 2MP \cdot PQ$. (12. B. 2.); aber $2MP = Pp$ (§. 14.) Folgl. u. s. w.

Lehnsatz.

§. 17. Man wird also haben:

$$AQ^2 = Ap^2 + pQ^2 - Pp \cdot pQ.$$

Beweis. Denn man hat

$$AQ^2 = Ap^2 + pQ^2 - 2pM \cdot pQ \text{ (13. B. 2.)}$$

Aber man hat

$$2pM = pP \text{ (§. 14.) Folgl. u. s. w.}$$

§. 18. Zusatz. Weil $pQ = pP + PQ$, so ist

$$pQ^2 = pP \cdot pQ + PQ \cdot pQ$$

(2. B. 2.): woraus, wenn $pP \cdot pQ$ davon subtrahirt wird:

$$pQ^2 - pP \cdot pQ = PQ \cdot pQ:$$

und setzt man diesen Werth in den von AQ^2 (§. 17.) so ist:

$$AQ^2 = Ap^2 + pQ \,.\, PQ.$$

Daraus wird man, indem man Ap^2 auf beiden Seiten subtrahirt, folgern:

$$AQ^2 - Ap^2 = pQ \,.\, PQ.$$

Wenn man nun $(AQ+Ap)$ mit $(AQ-AP)$ multiplicirt, so wird man finden:

$$(AQ+Ap)(AQ-Ap) = AQ^2 - Ap^2;$$

folglich $(AQ+Ap)(AQ-Ap) = pQ \,.\, PQ$:

woraus man (nach dem 16. Satz des 6. Buchs) die Proportion

$$pQ : AQ+Ap = AQ-Ap : PQ$$

ableitet, oder wenn man AP statt Ap setzt, und die äußern Glieder versetzt:

$$PQ : AQ+AP = AQ-AP : pQ.$$

Aus diesen beiden Proport. zieht man nun den berühmten Lehrsatz;

In jedem Triangel verhält sich eine Seite zu der Summe der beiden andern Seiten, wie ihr Unterschied zu dem Unterschied oder der Summe der Abschnitte, welche der auf dieser Seite aus dem Gegenwinkel gefällten Perpendikel macht, jenachdem der Perpendikel innerhalb oder außerhalb des Triangels fällt.

§. 19. Zus. 2. Hätte man $AQ = pQ$.

Nimmt von beiden Seiten die zwei gleichen Glieder AQ^2, pQ^2 (§. 17.) weg, und fügt man auf beiden Seiten $pP \cdot pQ$ hinzu, so wird man haben:

$$pP \cdot pQ = Ap^2.$$

Lehnsatz.

§. 20. Es sei alles wie in §. 13., wenn der Winkel RpQ ein Rechter ist (Fig. 4.), und Winkel RpS = RpA und pS = pR = pA, so wird AS parallel und gleich Pp sein; und man wird haben $AQ^2 = RQ^2 - AS \cdot PQ$.

Beweis. Denn, zieht man von den beiden rechten W. RpQ u. Rpq, die beiden gleichen W. RpA, RpS ab, so werden die beiden gleichen W. ApP und Spq übrig bleiben. Aber es ist ApP = APp (5. S. B. 1.) folglich Spq = APq. Also sind AP, Sp prll. (29. Buch 1.) Aber sie sind auch nach der Constr. gleich. Folgl. sind die beiden geraden AS, Pp gleich und prll. (33. B. 1.)

Demnach ist auch

$RQ^2 = Rp^2 + pQ^2$ (47. B. 1.) $= Ap^2 + pQ^2$,

u. nach dem Lehns. §. 17.

$$AQ^2 = Ap^2 + pQ^2 - pP \cdot pQ.$$

Folglich $AQ^2 = RQ^2 - pP \cdot pQ$

$= RQ^2 - AS \cdot pQ.$

Lehnsatz.

§. 21. Ist alles wie in §. 13. u. 20, so wird man haben $SQ^2 = RQ^2 + AS \cdot pQ$.

Beweis. Macht man $ST = Sp$ u. $pT = pP$ (§. 11.) so werden die beiden Tr. SpT, APp die gl. W. SpT und APp haben (8. Buch 1.) Folgl. ist PpT eine gerade Linie (27. B. 1.). Nachgehends ist

$$SQ^2 = pS^2 + pQ^2 + pQ \cdot qT. \text{ (§. 16.).}$$

Aber man hat

$$pS^2 + pQ^2 = pR^2 + pQ^2 = RQ^2;$$

und $pT = pP = AS$.

Folglich $SQ^2 = RQ^2 + AS \cdot pQ$.

Aus den beiden vorigen Lehns., entspringt dieser Zus. das $AQ^2 + SQ^2 = 2RQ^2$.

Lehnsatz.

§. 22. Wenn man $AQ = pQ = BQ$, $Ap = pB = pS$ hat, und pS auf die Verlängerung von Bp liegt, so wird $AS \cdot pQ = Ap^2$ sein.

Beweis. Da die gleichschenkl. Tr. AQp und BQp unter sich gleiche Seiten haben, so hat man die W. $QpA = QpB$ (8. Buch 1.) Man wird nun einen W. ApC haben, welcher die Summe der beiden andern, und auch gleich der Summe der beiden W. SAp, ASp (32. Buch 1.) ist; welche unter sich gleich sind, weil der Tr. ApS gleichsch. ist (5. Buch 1.); jeder von ihnen wird gl. sein dem W. $ApQ = pAQ$

(5. Buch 1.). Es ist also der Tr. pAS ähnlich dem Tr. QpA (32. B. 1. 4. B. 6.), und daraus $pQ : Ap = Ap : AS$ u. $AS \cdot pQ = Ap^2$ (17. B. 6.)

Lehnsatz.

§. 23. Hat man $AB = AC = BD$ und $AD = BC$, so wird: $DC \cdot AB = AB^2 - AD^2$ sein.

Beweis. Die beiden Tr. ADB, ACB (Fig. 5.) welche unter sich gleiche Seiten haben, sind gleich (8. u. 26. B. 1.)

Da nun beide Tr. auf derselben Grundl. AB stehen, so werden sie auch zwischen denselben Parall. DC und AB liegen, (39. Buch 1.). Nimmt man nun auf BA die $BE = DC$, so wird auch DE gl. und parall. zu BC (33. Buch 1.) und auch gl. DA sein; daher werden auch die beiden gleichschenkl. Tr. BDA, DAE, welche einen gemeinsch. Winkel in A haben, ähnlich sein (5., 32. B. 1. u. 4. B. 6.) und es wird sich verhalten

$$AB : AD = AD : AE,$$

woraus $AB \cdot AE = AD^2$ (17. B. 6.)

Ferner findet sich, das

$$AB \cdot AE + AB \cdot BE = AB^2 \text{ (2. B. 2.)}$$

und, wenn man für $AB \cdot AE$ seinen Werth AD^2 und DC an die Stelle von AE setzt, so ist.

$$AD^2 + AB \cdot DC = AB^2.$$

Zieht man endlich davon AD^2 ab, so wird man haben:

$$DC \cdot AB = AB^2 - AD^2.$$

Lehnsatz.

§. 24. Wenn man in dem Kreise $B\mu G$ (Fig. 6.) der mit dem Halbmesser AB beschrieben ist, im Mittelpunkt A auf AB den Perpendikel Ae gleich der Sehne BG des Bogens $B\mu G$ errichtet, und aus e als Mittelpunkt, mit AB, als Halbmesser, einen Bogen beschreibt, welcher die Peripherie im Punkte μ schneidet, so wird der Bogen $B\mu$ gleich sein der Hälfte des Bogens $B\mu G$.

Beweis. Wegen der Gleichheit der Seiten in den beiden Tr. ABG, $A\mu e$, hat man W. $GAB = A\mu e$ (8. B. 1.). Es sei der W. $A\mu e$ durch μM halbirt, so wird man, da der Tr. μeA gleichsch. ist, haben W. $\mu eM = \mu AM$, und da in den beiden Tr. μeM, μAM die beiden andern Winkel gleich sind, so wird auch

$$\text{Tr. } \mu Me = \mu MA \text{ sein.}$$

(Zusatz 32. B. 1.); folglich ist μM perpendikular auf Ae (13. B. 1.) und parallel mit AB (29. B. 1.) und also der Winkel $M\mu A = \mu AB$ (27. B. 1.): demnach wird μAB die Hälfte des Winkels GAB

sein, folglich auch der Bogen Bμ die Hälfte des Bogens BμG.

§. 25. Wenn in dem Parallelogr. AM (Fig. 7) die Diagon. MA gleich den entgegengesetzten Seiten MB u. AN ist; so ist das Quadrat der andern Diaganale BN gleich dem Quadr. der erstern, plus den beiden Quadr. der zwei andern Seiten.

Beweis. Es sei AB durch den Perpendikel Mm in m halbirt (10., 11. B. 1.) und auf der verlängerten BA, An = Bm genommen, dann ist

$$mn = BA = MN.$$

Man wird also das Prllgrm. Mn haben (33. B. 1.), und der W. NnB wird ein rechter sein (27. B. 1.). Hieraus

$$BN^2 = AB^2 + AN^2 + 2AB \cdot An,$$

(12. B. 2.) Aber

$$An = \tfrac{1}{2} AB. \text{ Also}$$

$$BN^2 = AN^2 + 2AB^2 = AN^2 + AB^2 + MN^2.$$

§. 26. Wenn man in einem beliebig. Tr. BPE (Fig. 8) die Grundl. BE in A halb., u. aus dem Gegenw. P, PA zieht, so wird die Summe der Quadr. aus den Seiten BP und PE gleich sein der Summe der gleichen Quadrate aus den beiden Abschnitten, indem man das doppelte Qdrt. von AP hinzufügt.

Beweis. Denn, fällt man den Perpendikel PR auf die Grundl. BE, so ist

$$BP^2 = BA^2 + AP^2 + 2BA \cdot AR$$

(12. B. 2.). Demnach ist

$$PE^2 = AE^2 + AP^2 - 2AE \cdot AR$$

(13. Buch 2.). Nach dem man nun die Summe der beiden Quadrate BP^2 und PE^2 gemacht hat, und überdem $BA = AE$ ist, so hat man

$$BP^2 + PE^2 = BA^2 + AE^2 + 2AP$$
$$= 2AB^2 + 2AP^2.$$

Zweites Buch.

Von der Theilung der Peripherie und der Kreisbogen.

Aufgabe.

§. 27. Die Peripherie eines Kreises BDd in vier gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Man mache in derselben Peripherie (Fig. 9) mit dem ersten Zirkel (8.)

Bc = BC = CD = DE = Ed,

gleich dem Halbmesser AB; dann ist

dc = cB = BA (15. B. 4.)

Auch sei Ba = Ea = BD mit dem zweiten Zirkel, und BF = Bf = Aa mit dem dritten Zirkel gemacht. Dann wird die Peripherie in vier gleiche Theile BF, FE, Ef u. fB getheilt sein.

Beweis. Da BAE ein Durchm. (15. B. 4.) und die Tr. aAB, aAE alle Seiten gleich haben, u., folglich

folglich die W. aAB=aAE auch gleich sind, (8. B. 1.), so werden diese beiden W. Rechte sein (15. Buch 1.). Folglich $aB^2 = AB^2 + aA^2$ (47. Buch 1.) und subtrahirt man dann AB^2, so ist

$$aB^2 - AB^2 = aA^2.$$

Es sei nun zur Abkürzung $AB = 1$, dann ist

$aB^2 = BD^2 = 3$ (§. 2). Mithin

$aA^2 = 3 - 1 = 2$ und so auch

$BF^2 = aA^2 = 2 = 1 + 1 = AB^2 + AF^2$.

Folgl. wird im Tr. FAB der W. FAB ein rechter sein (48. Buch 1.), und eben so auch FAE (13. B. 1.). Daher sind die Bog. BF, FE unter sich gl., und viertel Kreise, so wie die Bog. Bf u. fE.

§. 28. Zusatz. Sind die W. BAa und BAF R., so werden die drei Punkte A, F, a in einer geraden Linie liegen.

§. 29. Wir haben die Periph. bereits in zwei gleiche Theile getheilt, nämlich, in P. B und E, in 3 Theile in B, D, d (15. B. 4.), in 4 Theile in B, F, E, f (§. 27); in 6 Th. in B, C, D, E, d, c. (25. B. 4.)

Aufgabe.

§. 30. Die Peripherie eines Kreises in 8 gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Da alles wie §. 27 ist, so sei gemacht aG =

aH = AB (Fig. 9) mit dem ersten Zirkel, Gg = Hh Aa = mit dem dritten Zirkel, so wird auch gh = Aa und die Peripherie in 8 gleiche Theile in B, G, F, H, E, h, f, g getheilt sein.

Bew. Da $Aa^2 = 2$ (§. 27), so ist

$$Aa^2 = AG^2 + aG^2.$$

Der W. aGA wird demnach ein R. sein (48. B. 1.). Da nun aGA ein gleichsch. Tr., so sind die beiden andern W. GAa, GaA unter sich gl. (5. B. 1.), und jeder gleich $\frac{1}{2}$R (32. Buch 1.). Daher wird W. GAF gl. W. GAa (§. 28), die Hälfte von BAF sein: also auch der Bog. GF = BG. Aber nach der Constr. ist Gg = BF (26. B. 3.); folgl., wenn man BG beiderseits abnimmmt, so ist GF = Bg. Auf gleiche Weise beweist man, daß die andern Bog. gleich sind. Folgl. wird der Umfang in Theile, jeder gleich der Hälfte von $\frac{1}{4}$ Kr., und demnach auch in 8 gleiche Theile getheilt sein.

Aufgabe.

§. 31. Die Peripherie in 12 gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Wenn alles wie in §. 27 ist (Fig. 9), so mache man FN = Nn = FO = Oo = AB.

Dann wird der Umfang in B, N, C, F, D, O, E, o, d, f, c, n in 12 gl. Theile getheilt sein.

Beweis. Denn zieht man von den gl. Bog. BF, FE, die gleichen Bog. BC, DE ab, so werden die übrig bleibenden Bogen CF, FD gleich sein. Nun ist der Bog. CD der sechste Theil der Perph.; folgl. wird der Bog. CF die Hälfte dieses Bog. sein, und demnach $\frac{1}{12}$ der Peripherie. Da nun FN=CD, so ist auch noch CF=CN. Folgl. wegen FN=CB, auch CN=NB.

Auf gleiche Weise beweist man, daß jeder der andern Bog. der 12te Theil der Periph. ist.

Aufgabe.

§. 32. Die Peripherie in 24 gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Ist alles wie oben §. 30 u. 31, so mache (Fig. 9.) GL=LM=Gk=ki=HI=IK=Hm=ml=AB, mit der erstern Oeffnung des Zirkels, und die Aufg. ist gelöst.

Beweis. Denn zieht man von den gleichen Bog. GF, GB (§. 30), die gleichen Bogen CF und NB (§. 31) ab, so werden die Reste GC, Gn gleich sein. Nun ist CN der zwölfte Theil der Peripherie, folgl. werden GC u. GN davon der 24ste Theil sein.

Demnach wäre FN = GL; nimmt man den gemeinsch. Theil FG davon, so ist NG = FL; folgl.

wird auch FL der 24. Theil der Periph. sein, und folgl. die Hälfte von FD (§. 31). Auf gleiche Weise beweist man, daß die Bg. DH, HO, FI, IC, so wie alle andere oben bestimmten gleich sind.

§. 33. Um kürzer zu sein, werden wir fortfahren ohne sie wie bisher zu citiren, von dem 26. u. 27. Satz im 3. Buche des Euklids Gebrauch zu machen, daß in einem und demselben Kr. oder in gl. Kr. gleiche Sehnen, gleiche Bog. umspannen.

§. 34. Die Alten theilten mittelst des Mittelp. A und des Halbm. AB mit dem Zirkel allein die Peripherie in sechs gleiche Theile. Sie erhielten die andern Theilungen mittelst des Lineals und des Zirkels, indem sie verschiedene P. außerhalb der Periph. annahmen. Es ist uns gelungen einen Punkt a zu bestimmen, welcher allein hinreicht, den Umfang in 24 gleiche Theile mit dem Zirkel allein zu theilen; welches zugleich weit förderlicher, weit bequemer und weit genauer ist, als die Methoden der Alten.

§. 35. Man kann zugleich das elegante Gesetz bemerken, welches die hinreichenden Zirkel-Oeffnungen für diese Theilung befolgen;

Die Oeffnung der ersten Zirkels $= V1$,
" " " dritten " $= V2$ und
" " " zweiten " $= V3$.

Lehnsatz.

§. 36. Wenn man in dem Kreise BGE den Halbmesser $AB = 1$ hat, und der Bogen BG der achte Theil der Peripherie ist, so ist das Quadrat seiner Sehne BG, d. h. $BG^2 = 2 - \sqrt{2}$. Fig. 10.

Beweis. Auf den Durchm. BE sei der Prph. GP gefällt. In dem rechtw. Tr. GPA ist nun, da W. $GAP = 45°$, auch $AGP = 45°$ (32. B. 1.) und folgl. $GP = PA$.

Man hat aber

$$AG^2 = PG^2 + AP^2 \text{ (27. B. 1.)}$$

folglich $AG^2 = 2AP^2$,

oder $2AG^2 = 4AP^2$,

oder $2 = 2AP^2$:

folglich $\sqrt{2} = 2AP$;

und $AP = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;

$$BP = AB - AP = 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Da nun W. BGE ein R. (31. B. 3.), so ist

$BP : BG = BG : BE$ (8. 4. B. 6.)

folglich (17. B. 6.)

$$BG^2 = BP \times BE = 2BP.$$

Also $BG^2 = 2 - \sqrt{2}$.

Lehnsatz.

§. 37. Ist alles wie in §. 36., so wird $GE^2 = 2 + \sqrt{2}$. Fig. 10.

Beweis. Es ist $BE^2 = GE^2 + BG^2$ (47. B. 1.). Aber $BE^2 = 4$;

$BG^2 = 2 - V2$ (§. 36);

folgl. $4 = GE^2 + 2 - V2$,

also $2 = GE^2 - V2$,

und also $GE^2 = 2 + V2$.

Aufgabe.

§. 38. Wenn die Peripherie bereits in 24 gleiche Theile getheilt ist (§. 32.); sie noch weiter in 48 gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Man mache Be = Ee = aN (§. 11) (Fig. 11.) mit einem vierten Zirkel, u. $e\mu = e\nu = AB$ mit dem ersten Zirkel, so sind die Bog. $K\mu$, μN, νO $\frac{1}{48}$ der Prph.

Beweis. Denkt man sich die geraden Linien Aa, nN, aN, aB (§. 12), u. da der W. BAa ein R. ist, W. BAN = BAn (§. 31), und die drei Halbm. AN, AB, An gleich sind, so ist

$$aN^2 = aB^2 - Nn \cdot Aa \text{ (§. 20).}$$

Da nun aN = Be, so ist auch

$$Be^2 = aB^2 - Nn \cdot Aa.$$

Ferner, da die Tr. eAB, eAE bei A rechtw. sind, (8., 13. Buch 1.), weil ihre Seiten unter sich gleich sind, so hat man

$$Be^2 = AB^2 + Ae^2 \text{ (47. B. 1.)}$$

und folglich

$$AB^2 + Ae^2 = aB^2 - Nn \,.\, Aa;$$

aber es ist auch $aB^2 = AB^2 + Aa^2$.

folglich $AB^2 + Ae^2 = AB^2 + Aa^2 - Nn \,.\, Aa$;

nimmt man AB^2 beiderseits davon weg, so bleibt

$$Ae^2 = Aa^2 - Nn \,.\, Aa.$$

Aber $Aa^2 = 2$ (§. 27) und $Nn = 1$, weil Nn die Sehne eines Bog. von 60 Grad ist (§. 31). Folgl. $Ae^2 = 2 - \sqrt{2}$ = dem Qdrt. der Sehne des Bg. BG, welcher der 8. Theil vom Umfange ist (§. 30, 36.) Man wird also den Bog. $B\mu = \mu G$ (§. 24) haben. Nimmt man nun von jedem dieser Bog. die gl. Bog. BK, NG (§. 32) weg, so sind die geblieb. Th. $K\mu$, μN gl.; und so wie der Bog. KN der 24. Theil von der Periph. ist (§. 32), so wird jeder von ihnen davon die Hälfte, und folglich der 48. Theil der Periph. sein. So verhält es sich auch mit den Bog. $K\mu$, μN, M, u. ,O.

§. 39. Man kann auch mit derselben Construct. (Fig. 11) mittelst der oben angegebenen 4 Zirkel, die Periph. in 48 gl. Th. theilen (§. 8).

Theilt man mit der Oeffnung des ersten Zirkels = AB die Periph. in sechs gl. Th., indem man vom P. μ anfängt, so werden die Bogen JF, HO, mo, fl, ng halb. sein. Nun theile man die Prph. von dem P. , anfangend in sechs gleiche Th., so wird man die Bog. oh, fi, nk, NG, FL halbiren.

Theilt man nun wieder die Periph. in vier Th. mit der Oeffnung des 3. Zirkels = Aa vom P. μ aus, so werden die Bog. LD, ic halbirt; und wenn man vom P. ν ausgeht, so halbirt man eben so die Bog. IC und ld. Theilt man endlich nun noch mit dem ersten Zirkel die Periph. in sechs gl. Th., geht aber dabei von den letzten mit dem 3. Zirkel gefundenen Punkt aus, so werden alle andere Bogen halbirt.

Aufgabe.

§. 40. **Die Peripherie BDd in fünf gleiche Theile zu theilen.**

Auflösung.

Es sei alles wie in §. 31., man mache (Fig. 12) Nb = Ob = Aa mit dem dritten Zirkel, und BQ = Bb, so wird der Bog. BQ der 5. Th. von der Periph. sein.

Beweis. Wenn man die gr. NO u. AF zieht, welche sich in X schneiden, so wird wegen der gleichseitigen Tr. FNA, FOA die AF in X (10. B. 1.) halbirt sein, eben so auch NO (§. 14). Da nun der Bg. NFO gl. dem Bg. BCD (§. 31), so wird das Qdrt. seiner Sehne NO gleich sein dem Qdrt. der Sehne BD = 3 (§. 2). Woraus das Qdrt. ihrer Hälfte, d. h. $NX^2 = \frac{3}{4}$. (Satz 4. B. 2. Zus.)

Ferner sind die P. b, A, X in einer gr. L., u. der Tr. NbX ist rechtwinklich (§. 12, 13, 14). Nun ist auch $Nb^2 = Aa^2 = 2$ (§. 27); folgl.

$$Xb^2 = Nb^2 - NX^2 \text{ (47. B. 1.)}$$
$$= 2 - \tfrac{3}{4} = \tfrac{8}{4} - \tfrac{3}{4} = \tfrac{5}{4}.$$

Aber da XAB = R. und = FAB, so ist

$$BX^2 = AB^2 + AX^2 \text{ (47. B. 1.)}$$

Ueberdieß ist $AX^2 = \tfrac{1}{4} AF^2$ (4. B. 2. Zus.) folglich

$$BX^2 = 1 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{5}{4} = Xb^2.$$

Also sind die gr. BX u. Xb gleich. Folglich wird man den P. b haben, denselben, dessen sich Ptolemaeus im ersten Buche des Almagest bediente, um in einem Kr. ein regulâres Fünfseit und Zehnseit zu beschreiben.

Siehe den Bew. von Clavius in der Anmerkung, welche von dem 10. Satz im 13. B. des Euclides abhängig ist.

Siehe ferner die folgenden §. (§. 45. u. s. w.), welche den Bew. dieses Satzes und der folgenden vollständig geben werden.

Aufgabe.

§. 41. Die Peripherie in 10 gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Es sei alles wie in der vorhergehenden Aufg.

(§. 40.); man mache (Fig. 12) BP = Ab. Dann ist BP = PQ. Jeder dieser Bog. ist gl. dem 10ten Th. der Periph.

Beweis. Siehe Euklids 10. B. 13.

Aufgabe.

§. 42. Die Peripherie in 120 gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Es sei alles wie in §. 32 und 40, so wird QI (Fig. 12.) der 120ste Th. von der Periph. sein.

Beweis. Es ist Bog. BI gleich $\frac{5}{24}$ (§. 32.) und der Bog. BQ $\frac{1}{5}$ der Periph. folglich

$QI = BI - BQ = \frac{5}{24} - \frac{1}{5} = \frac{25-24}{120} = \frac{1}{120}$.

§. 43. Nun kann man noch, wenn man will, mit vier Zirkel allein, oder mit 4 Oeffnungen ein und eben desselben Zirk., und mittelst der beiden einzigen P. a u. b außerh. der Prph. genommen dieselbe in 120 gl. Th. theilen. Gesetzt, man hätte mittelst des P. a und mit 3 Zirkeln die Peripherie in 24 Th. getheilt (Aufg. §. 32) und hätte den P. b gefunden, (§. 40) so mache man mit dem vierten Zirkel

$$BP = PQ = QR = RS = Ab,$$

und folgl. auch = SE (§. 41). Ferner, um den Bg. NG in 5 gleiche Th. zu theilen, von denen jeder der 120. der Periph. ist, mache man

$Lq = qp = I\pi = O\varrho = \varrho\omega = \omega\varphi = Ab.$

Dann ist der Bogen NG in 5 gleiche Th. getheilt, und man wird auf gleiche Weise alle andere Bogen GC, CI u. s. w. theilen können.

Beweis. Da BQ=RE, BF=FE, IF=FL, so ist auch IQ = LR; und da Lq = QR, so wird auch Qq = LR = QI sein. Eben so, da QP=qp, so ist auch Qq = Pp = QI.

Eben so ist, da $I\pi = QP$, auch $\pi P = QI$, und da $O\omega = BQ$, $OI = IB$, so ist auch $I\omega = QI$.

Da ferner, $\omega\varphi = I\pi$, so ist

$$I\omega = \varphi\pi = QI.$$

Nachgehends da

$$O\varphi = O\varrho + \varrho\omega + \omega\varphi = BP + PQ + QR = BR,$$

schneidet man nun beiderseits die gl. Bog. OG, BL ab, so wird übrig bleiben

$$G\varphi = LR = QI.$$

Endlich schneidet man, da BI = LN, von den gleichen Bogen BQ, Lp ab, so wird QI = Np bleiben. Folglich hat man den Bog. NG in fünf gl. Bog. Np, pP, $P\pi$, $\pi\varphi$ und φG getheilt, wovon jeder = Bg. QI, und folgl. auch unter sich gl.; u. da nun der NG der 24. Th. der Prph. ist (§. 32), so wird sein fünfter Th. der 120. sein.

§. 44. Wir haben also bisher ohne irgend ein anderes Instrument als den Zirkel dieselben Theilungen der Peripherie in gleiche Theile gemacht, welche die Alten machten, indem sie in den

Kr. die 5 regulären Polygone beschrieben; nämlich: den Tr., das Quadrat, das Fünf-, Sechs- und Funfzehnseit, und sich nebst dem Zirkels noch des Lineals bedienten, da wir hingegen hier auf eine bequemere Art dazu gekommen sind, indem man nur 2 P. außerh. der Periph. nimmt, und nur 4 Oeffnungen eines einzigen Zirkels, oder nur 4 Zirkel sich erlaubt (§ 43. 8.) Vergleicht man nun diese Methode mit der bekannten, so wird man sich von ihrer Einfachheit, ihrer Kürze und ihrer Genauigkeit im Praktischen überzeugen.

§. 45. Da nach §. 40.

$$Xb + XF = Fb + Xb + XA,$$
$$\text{und } Ab = Xb - XA,$$
$$\text{so ist } Fb \cdot Ab = Xb^2 - XA^2$$
$$= XB^2 - XA^2 = AB^2;$$

oder auch $Fb \cdot Ab = FA^2$:

folglich wird Fb in A im mittleren und äußeren Verhältniß getheilt sein (30. B. 6.)

§. 46) Es wäre demnach

$$Fb \cdot Ab = (FA + Ab) \cdot Ab = fA^2$$
$$= (fA + Ab) \cdot Ab = fA \cdot Ab$$
$$Ab^2 = fA \cdot (fA - fb) + Ab^2$$
$$= fA^2 - fA \cdot fb + Ab^2.$$

Hat man nun:

$$fA^2 = fA^2 - fA \cdot fb + Ab^2,$$

und nimmt fA^2 davon, und fügt $fA \cdot fb$ hinzu, so hat man $fA \cdot fb = Ab^2$: folglich wird die Linie Af

in b getheilt sein, im mittleren und äußeren Verhältniß.

§. 47. Wenn man aus dem Mittelp. b und mit dem Halbm. bA einen Bog. beschreibt, welcher die Periph. in T schneidet, so wird

$$Tf = Tb = bA \text{ sein.}$$

Wirklich ist

$$fA \cdot fb = Ab^2 = Tf^2,$$

woraus (17. B. 6.) man diese Proportion ableitet:

$$fA : fT = fT : fb.$$

Die beiden Tr. fAT u. fbT, in welchen der W. f beiden gemeinschaftlich ihre daran liegenden Seiten proportionirt sind, werden also (6. B. 6.) ähnlich sein: folglich wird auch der Tr. fbT gleichschenkl., und also $Tb = Tf$ sein.

§. 48. Der Winkel

$$TbA = Tfb + bTf \text{ (32. B. 1.)} = Tbf + bAT.$$

Fügt man nun Tbf hinzu, so wird

$$TbA + Tbf = 2Tbf + bAT \text{ sein;}$$

aber $TbA + Tbf$ machen 2 R. (13. B. 1.): folglich $2Tbf + bAT$ auch $= 2R$. Nun ist aber

$$Tbf = bAT + bTA \text{ (32. B. 1.)} = 2bAT$$

(5. B. 1.). Folgl.

$$2Tbf + bAT = 5bAT = 2 R.$$

Demnach wird W. bAT, welcher $= bAT$, ein Fünftel von 2 R. und der Bog. fT ein Zehntel der Peripherie sein.

§. 49. Nimmt man die Sehne ft = fT, so ist bt = ft (§. 47), und die beiden gr. fT, bf werden sich in der Mitte unter rechten W. in y schneiden (§. 14); dann ist

$$Tf^2 = Ty^2 + fy^2;$$

woraus $4Tf^2 = 4Ab^2 = 4Ty^2 + 4fy^2 = Tt^2 + fb^2;$

und $Tt^2 = 4Ab^2 - fb^2.$

Aber $fb^2 = (fA - Ab)^2 = fA^2 - 2fA \cdot Ab + Ab^2.$

Daher $Tt^2 = 3Ab^2 - fA^2 + 2fA \cdot Ab.$

Aber $2fA \cdot Ab = 2fA \cdot (fA - fb) = 2fA^2 - 2fA \cdot fb$

$= 2fA^2 - 2Ab^2.$

Mithin $Tt^2 = 3Ab^2 - fA^2 + 2fA^2 - 2Ab^2$

$= fA^2 + Ab^2 = BA^2 + Ab^2 = Bb^2.$

Folglich auch Tt = Bb; aber Tt ist die Sehne von zwei Zehntel, oder ein Fünftel der Peripherie; folglich ist es auch Bb. Demnach:

§. 50. In dem rechtwinkligen Triangel ABb ist das Quadrat der Seite des Fünfseits gleich der Summe der Quadrate der Seiten des Sechsseits und des Zehnseits.

Dieser Satz ist der 10te im 13ten Buche des Euklides.

§. 51. Die Seiten des rechtw. Tr. ABb sind Sehn. vom Bog., welche in contra-harmonischer Pro-

portion sind. Denn diese Bog. sind $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$ der Periph. und man findet diese Proportion:

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{6} : \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10} : \frac{1}{5}.$$

Anmerk. Contra-harmonische Proportion ist die Relation zwischen drei Größen a, b, c, wenn $a - b : b - c = c : a$, z. B. 12, 10, 6 geben $12 - 10 : 10 - 6 = 6 : 12$.

Drei Größen A, B, C sind in einer harmonischen Prop., wenn $A - B : B - C = A : C$; z. B. 12, 8, 6 geben

$$12 - 8 : 8 - 6 = 12 : 6.$$

In jener ist das mittlere Glied $b = \frac{a^2 + c^2}{a + c}$;

in dieser $B = \frac{2AC}{A + C}$. d. Uebers.

§. 52. Aus den Proport. $fb : bA = bA : Af$ (§. 46) und $fb : bA = bA : AF$ folgt, daß der Durchm. Ff in A und b in 3 Th. getheilt ist, welche in stetiger Prop. sind.

Aufgabe.

§. 53. Die Peripherie in 20 gleiche Theile zu theilen, d. h. den zwanzigsten Theil der Peripherie zu finden (Fig. 12).

Auflösung.

Es sei alles wie in §. 40. Mache in dem $\frac{1}{4}$ Kr.

BVf, fV = Bb, dann wird der Bog. BV der 20ste Th. von der Periph. sein.

Beweis. In der That hat eine

$BV = Bf - fV = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ (§. 40) $= \frac{1}{20}$.

Andere Auflösung.

Es sei alles wie §. 40. Mache in dem viertel Kr. BVf, bV = AB, dann wird der Bog. BV $\frac{1}{10}$ der Periph. sein.

Bew. Da Ab die Sehne von $\frac{1}{10}$ der Periph. ist, so wird der Bog. BV die Hälfte von diesem 10. Th., folglich der 20. Th. davon sein (§. 24).

§. 54. Da Vb = VA, so ist der Tr. AVb gleichsch., so wie auch bTf.

Da nun ferner, FA:Ab = Ab:bf (§. 52) oder dafür gleiche Werthe gesetzt:

VA : Ab = Tb : bf;

so werden die Seiten der beiden gleichsch. Tr. proportionirt, folglich sind sie ähnlich (6. B. 6.)

§. 55. Da auch bF : FA = FA : Ab (45 u. 17. B. 6.), und substituirt man dafür gleiche Werthe so ist bF:bV = bV : Ab. Folgl. sind die Seiten, welche den gemeinsch. W. in b bilden, in den beiden Tr. bFV u. bVA proportionirt, und daher diese Tr. ähnlich (6. B. 6.). Mithin ist auch der Tr. bFV gleichsch. u. FV = Fb.

§. 56. Wenn der Bg. fV ein Fünftel (§. 53) u. der

der Bog. fT ein Zehntel der Periph. ist (§. 47); so so wird auch der Bog. TV davon $\frac{1}{10}$ sein; daher die Sehne TV = Tf = Tb = bA. Aber es ist auch Vb = TA (§. 53). Folgl. sind die beiden Tr. VTb, TbA einander gl., weil alle ihre Seiten respective gl. sind (8., 4. B. 1.).

Aufgabe.

§. 57. Eine Peripherie in 240 gleiche Theile zu theilen. Fig. 12.

Auflösung.

Wenn alles wie §. 43. ist, so sei durch die (§. 38, 39) gegebenen Mittel der Bog. NG in δ halbirt, welches geschieht, wenn man die Sehnen ,β, βδ gl. dem Halbm. e, macht. Die beiden Bogen Pδ, δπ werden nun jeder den 240 Th. der Periph. ausmachen. Siehe noch §. 58.

Beweis. Nimmt man näml. von den beiden Hälft. Nδ, Gδ die gl. Bg. NP, Gπ (§. 43) ab, so wird übrig bleiben Pδ = δπ. Aber Pπ ist der 120. Theil der Periph. (§. 43), folgl. u. s. w.

§. 58. Man wird nun mit einer angenommenen Zirkelöffnung vom P. δ nach irgend einem P. N von der bereits erhaltenen Theilung (§. 43) fortfahren können, alle 120 Th. der Prph. zu halbiren, z. B., mit dieser Oeffnung, indem man den Mittelp. in p nimmt,

wird man den Bogen $\pi\varphi$ theilen; nimmt man den Mittelpunkt in P an, so theilt man den Bogen φG u. s. w.

§. 59. Die drei P. a, b (Fig. 12) u. e (Fig. 11) sind sehr merkwürdig. Denn allein mittelst diesen außerhalb der Periph. angenommenen Punkten haben wir sie in 240 gleiche Theile getheilt, und wir sind nachgehends dahin gekommen den 240 Theil davon zu bestimmen, indem wir uns dazu nur der 5 Zirkel-Oeffnungen AB, BD, Aa, aN, Ab bedienen. Da nun diese P. in der Folge zu noch mehreren anderen wichtigen Bestimmungen dienen können, so werden wir, in Bezug auf sie, drei Fundamental-Gleichungen finden, aus denen wir, zu seiner Zeit, zwölf andere Gleichungen ziehen werden, von welchen wir bei sich darbietender Gelegenheit die Anwendung zeigen werden.

Aufgabe.

§. 60. **Einen Bogen BC (Fig. 13) in zwei gleiche Theile in G zu theilen.**

Auflösung.

Mit dem Halbmesser AB, welcher den theilenden Bog. BC beschr. hat, und aus den Mittelp. B u. C, welche die beiden Endp. des Bog. sind, seien die Bog. AD, AE beschr.; mache

$$AD = AE = BC \text{ (§. 10)};$$

ferner aus dem Mittelp. D u. E, und mit einem Halbmesser DC = BE seien zwei Bog. beschrieben, welche sich in F treffen. Nun beschr. man noch mit dem Halbm. AF, und aus denselben Mittelp. D u. E zwei andere Bogen, welche sich in G schneiden, dann ist der P. G in der Peripherie, und der Bog. BG = GC.

Beweis. Da die Seiten der drei Tr. DBA, BAC, ACE respektive gl. sind, so ist W. BCA = CAE (8. B. 1.). Mithin wird BC parall. zu AE sein (28. B. 1.), also ist BAEC ein Parallelogramm (33. B. 1).

Auf gleiche Weise thut man dar, daß BCAD ein Prllgr. ist. Nachgehends hat man in dem Prllgr. BCAD, die Diagonale AB gleich den entgegengesetzten Seiten BD u. AC. Folgl. wird das Quadrat der Diagon. DC gleich sein der Summe des Quadrats der andern Diagon. AB, und der Qdrt. der beiden Seiten AD, BC (§. 25), d. h.

$$DC^2 = AB^2 + 2AD^2;$$

und da die beiden gr. DA, AE prll. zu BC, so sind die P. D, A, E in einerlei geraden Linie. Ferner, da in den Tr. FAD u. FAE alle einzelne Seiten gl. sind, so sind auch die W. FAD, FAE gl. (8. B. 1.) und also rechte W. (13. B. 1.).

Demnach ist $DF^2 = AD^2 + AF^2$;
aber $DF^2 = DC^2$.
Folgl. $AD^2 + AF^2 = AB^2 + 2AD^2$;
und nimmt man AD^2 davon weg, so ist
$AF^2 = AB^2 + AD^2$.
Nun ist aber $DG^2 = AF^2$;
daher $DG^2 = AB^2 + AD^2$:
u. weil die Tr. GAD u. GAE gl. S. haben, so sind die W. GAD u. GAE gleich und rechte W. (§. 8) (13. B. 1.). Mithin
$DG^2 = AG^2 + AD^2$:
also $AB = AG$,
und demnach der P. G in der Periph. Nimmt man nun von den rechten W. GAD, GAE die gl. W. BAD, CAE ab, so werden die übrig gebliebenen W. BAG, GAE gl. sein. Folglich ist der Bog. BC in G halbirt (33. B. 6.)

§. 61. Anmerk. Wenn der zu theilende Bog. sehr klein ist, wie bc (Fig. 13), so ist es in der Praxis besser, auf beiden Seiten etwas große gl. Bg. hinzuzufügen, wie bB, cC, u. dann den Bog. BC in G zu halbiren. Der Bg. bc wird alsdann auch halbirt sein.

§. 62. Wenn dagegen der zu theilende Bog. zu groß ist, wie PGQ, so muß man von beiden Seiten gl. Bg. PB, QC abschneiden, um der Hälfte

des Bog. BC eine mittlere Größe zu geben, u. dann den Bog. in G zu halbiren. Der Bog. PGQ wird nun auch halbirt sein.

§. 63. Man sieht also, daß man alle die Aufg. welche die Theilung der Peripherie oder der Bogen des Kr. betreffen, und die mit Hülfe des Lineals u. und Zirkels aufgelöst werden, sich auch mit dem Zirkel allein lösen lassen.

Drittes Buch.

Von der Vervielfältigung und Theilung der geradlinigen Abstände.

Aufgabe.

§. 64. Die Weite von AB zu verdoppeln.

Auflösung.

Aus dem Mittelp. A, und mit einem Halbm. AB beschreibet (Fig. 2) einen Halbkr. BCDE; d. h. machet BC = CD = DE = AB (§ .10), so wird die Linie BAE gr. und das Doppelte von AB sein.

Beweis. Siehe den 15ten Satz des 4. Buchs.

Aufgabe.

§. 65. Eine Weite AB zu verdreifachen, zu vervierfachen. ꝛc. (Fig. 1).

Auflösung.

Zu AB setze noch (§. 64) die gl. gr. AE, u. auf gleiche Weise die gleiche Linie CV u. s. w., so wird

die gr. BAEV gl. sein ZAB: fährt man auf diese Art fort, so wird man sie vervierfachen u. s. w.

Beweis. Die Linie BAE ist sowohl eine gr. (15. B. 4.) wie AEV eine gr. L. ist, u. s. w.

Aufgabe.

§. 66. **Die Weite von AB zu halbiren, d. h. den Punkt M finden, welcher in der Mitte von AB liegt.**

Auflösung I.

Hat man (Fig. 14) den Halbkreis BCDE, (§. 64) und vom Mittelp. E und mit dem Halbm. EB einen unbestimmten Bog. PBp beschr., so beschr. man aus B mit dem Halbmesser BA noch einen Halbkr. pAPm; und dann wieder aus P und mit dem Halbmesser PB den Bog. BM, und mache BM = Pm; so ist M der gesuchte P.

Beweis. Die Linie Bm wird auf die Verlängerung von Bp liegen (15. Buch 4.), setzt man nun die drei gl. L. BP, Bp, Bm (Fig. 14), statt der 3 gl. L. Ap, pB, pS (Fig. 4) (§. 22) und die drei gl. L. PE, BE, pE; statt AQ, pQ, BQ, u. die Linie Pm für AS; so wird die Gleich.

$$AS \cdot pQ = Ap^2 \text{ (§. 22)},$$

so zu stehen kommen:

$$Pm \cdot BE = BP^2.$$

Es ist aber

$$BE = 2AB, \text{ und } BP = AB:$$

$$\text{folgl. } 2AB \cdot Pm = AB^2;$$

und theilt man durch AB, so ist

$$2Pm = AB = 2BM.$$

Ueberdem haben die Tr. BPM, BPm gl. W. (8. S. B. 1.); folglich ist mP prll. Bm (28. B. 1). Aber auch die Tr. BPm, BPE haben gl. W. (§. 22); mithin mP prll. BE (28. B. 1.): daher fallen die L. BM u. BE zusammen.

Auflösung II.

Aus A als Mittelp. und mit dem Halbm. AB (Fig. 15) sei der Halbkr. BCDE (64) beschrieben. Aus B, E als Mittelp. u. mit demf. Halbm. AB die beiden unbestimmten Bog. CP, DQ; aus denselben P. B u. E als Mittelp. und mit einem Halbm. BE seien die beiden Bog. EQ, BP u. aus dem Mittelp. P und mit dem Halbm. PB sei der Bog. BM beschr. Beschr. man nun aus E als Mittelp. und mit dem Halbm. PQ einen Bog., welcher den Bog. BM in M schneidet, so wird dieses der gesuchte P. sein.

Beweis. Nachdem man in der (Fig. 5) die nöthigen Substitutionen gemacht hat (§. 23); so hat man $PQ \cdot BE = BE^2 - BP^2$.

Aber $BE = 2AB$, $BP = AB$,

$PQ = ME$.

Folgl. $2ME \cdot AB = 4AB^2 - AB^2 = 3AB^2$.
Dividirt man mit AB, so ist

$$2ME = 3AB.$$

Aber da in PQEM die gegenüberstehenden Seiten gl. sind, so ist es ein Prllgr., welches durch die Dia. QM in zwei gleichseitige Tr. getheilt, W. PQM = QME giebt (8. B. 1.): woraus erhellt, daß PQ prll. zu ME (28. B. 1.) u. PM prll. QE ist (33. B. 1). Ferner ist noch PQ prll. BE (§. 23): folglich fallen ME, BE in einander. Da nun

$$ME = MA + AE = MA + AB,$$

so ist $2ME = 2MA + 2AB = 3AB$:
hieraus $2MA = AB$.

Auflösung III.

Aus dem Mittelp. A (Fig. 16) und mit einen Halbm. AB sei der Halbkr. BCDE beschr. (§. 64); aus B und mit dem Halbm. BE sei der unbestimmte Bg. PEp beschr. aus E und mit dem Halbm. EC sei ein Bog. beschr., welcher diesen letzten in den P. P u. p schneidet; aus P, p und mit demselben Halbm. PE seien zwei Bog. beschr., welche sich in M schneiden, dann wird der P. M der gesuchte P. sein.

Beweis. Der P. M wird in der gr. BE liegen (§. 13) und subst. man in der Gleich. (§. 19) $pP \cdot pQ = Ap^2$, die Weiten, d. h. die dieser Fig. entsprechenden Linien, so wird man die Gleich.

$EM \cdot EC = PE^2$ bekommen.

Und da $PE^2 = EC^2 = 3AB^2$ (12. B. 13) (§. 2),

so ist $2AB \cdot EM = 3AB^2$;

und theilt man mit AB, so ist $2EM = 3AB$, oder auch $2AE + 2AM = 3AB$:

nimmt man nun die gl. Größen 2AE u. 2AB davon weg, so bleibt $2AM = AB$.

Auflösung. IV.

Es sei der Halbkr. BCDE (Fig. 17) beschr. (§. 64); aus B und mit einem Halbm. BD, sei ein unbestimmter Bog. aDp beschr.; aus E und mit demselben Halbm. BD, sei ein Bog. beschr., welcher den Bog. aDp im P. a trifft. Ferner sei mit dem Halbmesser Aa und aus E ein Bog. beschr., welcher diesen Bog. aDp in P und p schneidet; endlich seien mit demselben Halbm. Aa u. aus P u. p zwei Bog. gezogen, welche sich in M schneiden, so wird M der gesuchte P. sein.

Beweis. Der P. M wird in der gr. L. Linie BE liegen (§. 13); macht man nun die nöthigen Substitution in der Gleichung:

$$AQ^2 = Ap^2 + pQ \cdot PQ \text{ (§. 18)},$$

dann ist $PB^2 = PE^2 + EB \cdot MB$;

oder $BD^2 = Aa^2 + 2AB \cdot MB$;

oder auch (12. B. 13.) (§. 2):

$$3AB^2 = 2AB^2 \text{ (§. 27)} + 2AB \cdot MB:$$

daher, wenn $2AB^2$ davon abgenommen wird, übrig bleibt $AB = 2MB$,

Man kann von dieser Aufg. noch mehrere Aufl. angeben, entweder indem man sich neuer Halbm. des Kr. bedient, oder indem man die vorhergehenden Aufl. unter sich verbindet; ich halte es aber für unnütz, sie anzuführen.

Hier ist noch eine ziemlich einfache, welche aber in der Praxis nicht sehr genau ist, weil darin die Bog. sich unter zu spitzen W. schneiden.

Auflösung V.

Nachdem man (Fig. 14) 1) aus A und mit einem Halbm. AB den Halbkr. BCDE (§. 64) beschr. hat; 2) aus E und mit einem Halbmesser EB den unbestimmten Bog. PBp; so beschr. man aus B und mit einem Halbm. AB einen Bog., welcher den Bog. PBp in P u. p schneidet. Es seien noch aus P u. p und mit demselben Halbm. AB, zwei Bogen beschr., die sich in M schneiden, so wird der P. M der gesuchte sein.

Beweis. Der P. M wird in der gr. BE sein (§. 13); u. da, wegen einen an der Grundl. in B gemeinsch. W. (5., 32. B. 1., 4. B. 6.), die beiden gleichsch. Dr. PBM u. PBE ähnl. sind, so hat man

$$BE : BP = BP : BM.$$

woraus nach (17. B. 6.)

$$BE \cdot BM = BP^2 = AB^2,$$

oder $$2BA \cdot BM = AB^2,$$

dieses durch AB getheilt, giebt

$$2BM = AB.$$

Aufgabe.

§. 67. Die Halbirungen mittelst einer einfachern Construktion von AM in N, und von AN in O u. s. w., ins Unendliche fortzusetzen.

Auflösung I.

Nachdem man (Fig. 18) mit dem Halbm. AB der Halbkr. BCDE (§. 64); aus B mit dems. Halbm. AB, den unbestimmten Bog. P′CAp′; aus E und B, mit dem Halbm. BE die beiden Bog. R′Q′P′Bp′q′r, PQRErqp; und aus E, mit dem Halbm. EC den Bg. PCp beschr. hat; man nun aus P′, p′ u. mit dem Halbm. AB zwei Bog. beschr., so werden sie sich in der Mitte M der gr. AB schneiden [Aufl. V. (§. 66)]. Wenn man aus P, p und mit dem Halbm. PE zwei Bog. beschr., so werden sie sich gleichfalls in demselben P. M schneiden [Aufl. III. (§. 66)].

Macht man nun

$$BQ' = Bq' = q'N = Q'N = AP' \text{ (§. 11)},$$

so wird N die Mitte von AM sein. Man mache noch

$$BR' = Br' = r'O = R'O = AQ'.$$

So wird O in der Mitte von AN sein. Fährt man

so fort, so wird man auf gleiche Weise AO in zwei gleiche Theile theilen, u. s. w. ins Unendliche.

Beweis. Denkt man sich eine gr. $P'A$, welche die Grdl. BE des Tr. PBE (§. 12) halb, so ist (§. 26):

$$BP'^2 + P'E^2 = 2AB^2 + 2AP'^2.$$

Woraus, nach der Substitution der Werthe von

$$BP' = AB \text{ und von } P'E = 2AB,$$

und nachdem man $2AB^2$ abgezogen hat, sich ergiebt

$$3AB^2 = 2AP'^2.$$

Hieraus, wenn man durch 2 dividirt, folgt

$$AP'^2 = BQ'^2 = \tfrac{3}{2}AB^2;$$

u da N in der gr. BE ist (§.13), so ist der gleichsch. Tr. $Q'BN$, wegen den gemeinsch. W. in B (5. u. 32. B. 1., 4. B. 6.) ähnl. dem Tr. $Q'BE$. Folglich

$$BQ'^2 = BN \cdot BE \text{ (17. B. 6.)}$$

Vergleicht man ferner die beiden Werthe von BQ'^2 unter sich, so wird man finden,

$$\tfrac{3}{2}AB = BN \cdot BE = 2BN \cdot AB,$$

und durch $2AB$ getheilt,

$$\tfrac{3}{4}AB = BN;$$

folglich $AN = \tfrac{1}{4}AB$.

Auf gleiche Weise ergiebt sich (§. 26):

$$BQ'^2 + Q'E^2 = 2AB^2 + AQ'^2.$$

Folgl. $\tfrac{3}{2}AB^2 + 4AB^2 = 2AB^2 + 2AQ^2$;

und reducirt $\tfrac{7}{4}AB^2 = AQ'^2 = BR'^2$.

Aber $BR'^2 = BO \cdot BE = 2AB \cdot BO$;

Folglich auch $\frac{7}{4}AB^2 = 2AB \cdot BO$;

woraus: $\frac{7}{8}AB = BO$; u. $AO = \frac{1}{8}AB$ u. s. w.

Auflösung II.

Man mache $EQ = Eq = qN = QN = AP$, so wird N die Mitte von AM sein. Man mache

$$ER = Er = rO = RO = AQ$$

so wird O die Mitte von AN sein. Fährt man nun auf diese Weise fort, so wird man die gr. AO halbiren u. s. f. ins Unendliche.

Beweis. Es ist in der That (§. 26):

$$PE^2 + PB^2 = 2AB^2 + 2AP^2;$$

ferner, wenn man die Werthe von

$$PE^2 = CE^2 = 3AB^2 \text{ (12. B. 3.) (§. 2),}$$

und von $PB^2 = BE^2 = 4AB^2$

substituirt, so hat man

$$7AB^2 = 2AB^2 + 2AP^2.$$

Läßt man nun $2AB^2$ weg, und theilt mit 2, so ist:

$$\frac{5}{2}AB^2 = AP^2 = EQ^2.$$

Aber wegen der ähnl. gleichsch. Tr. EQN u. EQB (§. 13) (5. u. 32. B. 1., 4 u. 17, B. 6) ist

$$EQ^2 = EN \cdot EB.$$

Folglich, $\frac{5}{2}AB^2 = EN \cdot EB = 2EN \cdot AB$;

und dividirt mit 2AB, so ist

$$\frac{5}{4}AB = EN, \text{ u. } AN = \frac{1}{4}AB.$$

Schließt man nun auf dieselbe Weise fort, so findet man, daß:

$$QE^2 + QB^2 = 2AA^2 + 2AQ^2;$$

woraus: $\frac{1}{2}AB^2 + 4AB^2 = 2AB^2 + 2AQ^2$; daraus auch: $\frac{9}{4}AB^2 = AQ^2 = ER^2 = EO.EB = 2AE.EO$; und durch $2AB$ dividirt: $\frac{3}{2}AB = EO$, und $AO = \frac{1}{2}AB$ u. s. w.

Auflösung III.

Aus A und mit dem Halbm. AB (Fig. 19), sei der Halbkr. BCDE (§. 64) beschr.; mit demselben Halbm. AB und aus B, E seien die unbestimmten Bog. CP u. Dp beschr., aus denselben Mittelp. B, E, und mit dem Halbm. BE seien die Bog. Epqr, BPQR beschr.; dann wird man den P. M finden können, indem man

$$PM = PB, \quad EM = Pp$$

macht [Aufl. II. (§. 66)]. Jetzt mache man

$$BQ = QN = Eq = Ap;$$

auch mache man $EN = Qq$; dann wird der P. N in der Mitte der gr. AM sein. Eben so mache man

$$BR = RO = Er = AQ,$$

und $Rr = EO$,

so wird O in der Mitte der geraden AN sein.

Beweis. Nachdem man in der 5ten Figur (§. 23) die erforderlichen Substitutionen gemacht hat, so wird man haben:

$$Qp \cdot BE = BE^2 - BQ^2.$$

Aber $BE = 2AB$,

und $BQ^2 = \frac{3}{2}AB^2$.

(Siehe den Bew. der Aufl. I). Folglich

$$2Qq \cdot AB = 4AB^2 - \tfrac{3}{2}AB^2;$$

dividirt man nun mit $2AB$, und reducirt, so ist

$$Qq = \tfrac{5}{4}AB.$$

Folglich auch $EN = \frac{5}{4}AB$;

also ist die gr. AB in beiden Fig. 18 u. 19 dieselbe, die Seiten der beiden Tr. Q'NE (Fig. 18) u. QNE (Fig. 19) werden auch dieselben sein. Bringt man die drei P. B, Q, E der 19. Fig. über die P. B, Q', E, der 18. Fig.; so werden die P. N in beiden Fig. zusammenfallen; folgl. u. s. w.

Macht man ferner die nöthigen Substitution in der 5. Fig. (S. 23), so ist

$$Rr \cdot BE = BE^2 - BR^2.$$

Aber $BR^2 = \frac{7}{4}AB^2$.

(Beweis der ersten Aufl.)

Mithin $Rr \cdot BE = BE^2 - \frac{7}{4}AB^2$;

oder wenn man dafür $2AB$ statt BE setzt, so ist

$$2AB \cdot Rr = 4AB^2 - \tfrac{7}{4}AB^2.$$

Dividirt man ferner mit $2AB$, und reducirt, so ist

$$Rr = \tfrac{9}{8}AB = OE.$$

Demnach fallen die P. E, R, B der 19ten Fig. mit den P. E, R', B der 18ten Fig. zusammen, und da RO, EO respective gl. R'O, EO (der 18ten Fig.) so fällt auch der P. O damit zusammen. Woraus

zu

zu ersehen, daß sich der P. O in der Mitte von AN befindet. Auf gl. Weise beweist man dieses für die andern Eintheilungen bis ins Unendliche.

Man könnte sich auch noch anderer Mittel bedienen, um dieselben P. zu finden; aber wir werden zu andern Theilungen der Linie AB die nicht durch Halbirung geschehen, übergehen.

Aufgabe.

§. 68. **Eine Weite AB in drei gleiche Theile zu theilen.**

Auflösung.

Man setze zu beiden Seiten von AB (Fig. 20) die beiden ihr gl. Weiten AE, BV hinzu (§. 64). Aus E, V und mit dem Halbm. EV seien die beiden unbestimmten Bog. QVq u. PEp beschr.; aus denselben Mittelp. E, V u. mit dem Halbm. EB zwei andere Bg., welche die erstern in Q, q u. P, p schneiden; mit demselben Halbm. EB, aus P und p zwei Bog., welche sich in T schneiden; endlich mit demselben Halbm. aus Q, q zwei Bg., die sich in t schneiden, so wird AB in drei gl. Theile in T und t getheilt sein.

Beweis. Die P. T, t werden in der gr. L. VE sein (§. 13); ferner wegen den in E gemeinsch. W. (5. u. 32. B. 1, 5. B. 6.), wird der gleichsch.

Tr. EPT ähnl. sein dem gleichsch. Tr. EPV; folgl. $PE^2 = ET \cdot EV$ (17. B. 6). Setzt man nun in dieser Gleich. 2 AB für PE, u. 3 AB für EV, so ist $\frac{4}{9}AB = ET$; daher $AT = \frac{1}{3}AB$. Auf gl. Weise beweist man, daß Bt ein Drittel von AB ist, und folgl. auch Tt.

Aufgabe.

§. 69. Eine Weite AB in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflösung.

Ein oder zwei Beisp. werden die allgemeine Regel besser einsehen lassen.

Beisp. I. Es sei (Fig. 21) die Weite AB in fünf gl. Theile zu theilen.

Man setze ihr in gr. L. die 4 ihr gl. Weiten AE, EF, FG, GH (§. 65) zu, so daß BH ihr Fünffaches ist, d. h. ein Vielfaches, welches durch die Anzahl der Theile, in welchen sie getheilt werden soll, angegeben wird. Aus den Endp. B u. H und mit einem Halbmesser AB (nämlich gleich der zu theilenden Weite) beschr. man zwei unbestimmte Bog. AC u. GI; aus dens. P. B, H und mit einem Halbm. BH, die beiden Bog. HI u. BC; ferner aus C mit dem ersten Halbm. AB einen unbestimmten Bog. BQ; endlich aus H mit dem Halbm. CI, beschr. man einen Bog.,

welcher den Bog. BQ in Q schneidet; so wird BQ in der Richtung von BA liegen, und davon der fünfte Theil sein.

Setzt man also zu BQ die gl. gr. Qq (§. 64) hinzu, und darauf die andern gl. L. qr, rs, so wird man alle Fünftel der gr. BA bestimmt haben.

Beisp. II. Will man die Weite AB in sieben gl. Theile theilen (Fig. 22), so mache man die Linie BH siebenmal größer als BA; aus dem Endp. dieser Linien, d. h. aus B u. H, mit dem Halbm. AB seien die unbestimmten Bog. AC u. GI beschr.; aus denselben P. B, H und mit dem Halbm. BH die beiden Bog. HI u. BC beschr.; aus C und mit dem ersten Halbm. AB, der unbestimmte Bog. BQ; aus H und mit dem Halbm. CI, sei ein Bog. beschr., welcher diesen Bog. BQ in Q schneidet, so wird BQ in der Richtung von BA und davon der siebente Theil sein.

Beweis. Da die Tr. CQI, IHQ respect. gl. Seiten haben, so ist W. CIQ = IQH (8. B. 1). Daher ist CI prll. HQ (28. B. 1.) Ferner, da auch CI prll. zu BH ist (§. 23), so wird der P. Q in der L. BH sein. Daraus ist zu ersehen, daß, da die beiden gleichsch. T. CBQ, CBH einen W. an der Grdl. in B gemein haben, sie ähnlich sind (§. 32. B. 1., 4. B. 6.); dies giebt:

HB : BC = BC : BQ, oder auch

HB : AB = AB : BQ:

dieselbe Linie AB wird daher so viel mal größer als BQ sein, als die HB größer wie AB ist.

Auflösung II. Fig. 23.

Will man AB theilen, z. B. in fünf gl. Th., so verfahre man so: nachdem man wie in der ersten Aufl. BH fünf mal größer als AB gemacht hat, so beschr. aus H, mit dem Halbm. AB einen unbest. Bog. CBc; jetzt aus B mit dem Halbm. BA, den Halbkr. cCK (§. 64): ferner, aus C mit demf. Halbm. AB den Bog. BQ; endlich aus B, und mit dem Halbm. CK einen Bg., welcher diesen Bg. BQ in Q schneidet, dann wird die L. BQ der 5. Th. von BA sein, und in derselben Richtung liegen.

Bew. Die gr. BK wird in der Verläng. von BC sein (15. B. 4). Nachdem man die nöthigen Substitutionen gemacht hat (§. 22) wird man haben:

$$KC.BH = BC^2 = AB^2;$$ und dieß giebt (17. B. 6.) $BH:AB = AB:KC$ oder auch

$$BH:AB = AB:BQ.$$

Folgl. wird dieselbe L. AB, so viel mal größer als BQ sein, wie BH größer ist als AB; und wenn man $BH = 5AB$ hat, so ist auch $AB = 5BQ$. Nachgehends da die beiden Tr. BKC, BCQ ihre Seiten unter sich gl. haben, so ist auch W. $KCB = CBQ$ (8. B. 1.). Aber der W. CBH ist auch gl. W. KCB (§. 22); folgl. wird BQ in der Richt. von BH sein.

§. 70. Es ist einleuchtend, daß diese letzte Aufg. (§. 69) sehr nützlich in der Praxis sein kann, um einen Fuß, der schon in Zolle getheilt ist, in L. zu theilen, weil, wenn BH gl. 12 Zollen ist, BQ gl. sein wird, dem 12. Th. vom ersten Zolle der AB d. h. gl. einer Linie.

Auf gl. Weise könnte man den schon in Decimeter getheilten Meter, ferner in Centimeter theilen.

Wenn AB, in welcher man den P. O finden soll, schon beschr. ist, so wird das Verfahren viel einfacher sein, weil es ohne aus C u. mit dem Halbm. AB den Bog. BQ zu beschr., hinreicht, die gegebene AB in Q mit den vorher angebebenen Zirkel-Oeffnungen zu schneiden.

Viertes Buch.

Von der Addition und Subtraktion der Weiten; von der Lage der Perpendikular- und Parallel-Linien.

§. 71. Es ist ohne Zweifel sehr einfach und sehr leicht, zu gegebenen Weiten etwas hinzuzufügen oder eine andere Weite mit dem Lineal und dem Zirkel davon ab zu nehmen, indem man eine unbegrenzte gerade durch die beiden Endpunkte der ersten Weite zieht, und mit dem Zirkel die zweite Weite hinzufügt, oder davon abnimmt, (3. Buch 1.); aber es ist gewiß weder so genau, noch so bequem, dieses mit dem Zirkel zu machen: auch wollen wir hier nicht die folgenden Aufg. als von großem Nutzen angeben, sondern allein, um einleuchtend zu machen, daß es keine Aufg. in der Elementar-Geometrie giebt, die man nicht auch mit dem Zirkel allein in dem schon angegebenen Sinne (§. 1) auflösen könnte, was wir in der Folge auch strenger darthun werden; und

um unser (§. 7) gegebenes Versprechen zu erfüllen, keines der Elemente dieser neuen Geometre auszulassen.

Aufgabe.

§. 72. Von der Weite AB (Fig. 24) eine Weite CD abzuschneiden.

Auflösung.

Aus dem Mittelp. B, mit dem Halbm. CD) (wenn man auf der Seite von B die Weite nehmen will), beschr. man den Kr. FGEH; aus dem Mittelpunkt A und mit irgend einem Halbm. sei ein Bog. beschr., der die Peripherie E u. F schneidet; halbire den Bog. EGF (§. 60) in G, dann liegt G in der geraden BA, und GA wird übrig bleiben.

Beweis. Da die Tr. EBG, FBG gl. Seiten haben, so ist

W. EBG = W. FBG (8. B. 1.)

daher W. EBG = der Hälfte des W. EBF. Die Tr. EBA, FBA haben auch gleiche Seiten unter einander, daher ist auch W. EBA die Hälfte des W. EBF. Mithin

W. EBG = W. EBA:

folglich G in der geraden AB. Aber BG ist auch = CD; schneidet man also CD von AB ab, so bleibt GA übrig.

Aufgabe.

§. 73. Zu der Linie AB die Weite CD in gerader Linie hinzuzufügen. (Fig. 24.)

Auflösung.

Aus dem Mittelp. B (wenn man auf dieser Seite die Weite CD zusetzen will), mit dem Halbm. CD sei der Kr. FGEH beschrieben. Aus dem Mittelp. A und mit irgend einem Halbm. sei ein Bogen beschrieben, welcher den Kreis in E und F schneidet; halbire in H den Bogen EHF (§. 60), dann liegt H in der geraden AB, und AH ist die Summe der beiden Weiten AB, CD.

Beweis. Da die Tr. EBH, FBH so wie auch EBA, FBA respective gl. Seiten haben, so ist

$$\text{W. EBH} = \text{EBH},$$

$$\text{und W. EBA} = \text{FBA}.$$

$$\text{Folgl. EBH} + \text{EBA} = \text{FBH} + \text{FBA}.$$

Aber die Summe dieser vier W. ist $= 4\,\text{R}$. (13. B. 1.); daher ihre Hälfte

$$(\text{z. B. EBH} + \text{EBA}) = 2\,\text{R}.$$

Mithin ist HBA eine gerade L. (14. B. 1). Ferner

$$\text{BH} = \text{CD},$$

$$\text{folgl. AH} = \text{AB} + \text{CD}.$$

Aufgabe.

§. 74. Auf AB von B nach A die Weite CD größer als AB zu legen. (Fig. 25).

Auflösung.

Aus dem Mittelp. B mit dem Halbm. CD sei ein unbestimmter Bogen LMN oder ein ganzer Kr. beschrieben; aus dem Mittelp. A, mit einem beliebigen Halbm. beschreibe man einen Bogen, welcher den ersten in den Punkten L und N schneidet; halbire nun den Bogen LN in M (§. 60), u. die L. BM ist alsdann die Linie CD, in der verlangten Lage.

Beweis. Da

Wink. LMA = NMA = $\frac{1}{2}$ LMN,

LMB = NMB = $\frac{1}{2}$ LMN,

so ergiebt sich aus dem Beweise der beiden vorhergehenden Aufg., daß

Winkel LMA = LMB

woraus erhellt, daß BAM eine gerade Linie ist: überdem ist sie auch gl. CD; folgl. u. s. w.

§. 75. Bemerk. Wenn der Bog., der aus dem Mittelp. A beschrieben ist, den aus B beschr. Bogen unter zu spitzen Wink. schneidet, wie geschiehet, wenn die L. AB gegen CD zu klein ist; so muß man zu BA in gerader Linie die

gleiche Linie BE ansetzen, und mit einem aus E beschriebenen Bogen den aus B beschriebenen schneiden; wenn dann die W. der beiden Bog. noch zu spitz sind, so muß man BA von B nach A verdreifachen, vervierfachen ꝛc. (§. 65.), bis der sie begrenzende Punkt., als Mittelp. des 2ten Bogens genommen, die Einschnitts-Winkel in L u. M mehr dem rechten sich nähernd giebt. Dasselbe wird man in ähnlichen Fällen in §. 72 u. 73 machen.

Aufgabe.

§. 75. Wenn zwei Punkte A u. B gegeben sind, einen Punkt H zu finden, so, daß die gerade Linie BH in A auf der AB perpendikular und einer gegebenen Linie CD gleich sei. (Fig. 26.)

Auflösung.

Aus dem Mittelp. B, mit der Entf. CD als Halbm. sei ein Kreis FEHG beschrieben, so wie auch aus A, mit der Entf. AB ein Bogen, welcher den Kreis in F und E schneidet; bestimme einen Halbkr. FEG (§. 64) und halbire den Bogen GE (§. 60) in H, so ist H der gesuchte Punkt.

Beweis. Da Tr. GEB = EBA (§. 22.) so ist W. GEB = EBA,

woraus erhellet, daß GE parallel zu BA ist (28. B. 1). Aber BH, welche den W. GBE in 2 gleiche Theile theilt, ist perpendikular auf der Sehne GE (9., 11., 12. B. 1.), und daher auch auf BA (28. B. 1). Ueberdem ist BH = CD; also ist H der gesuchte P.

Wenn die Linie AB kleiner als CD wäre, so müßte man verdoppeln, verdreifachen, u. s. w. (§. 64, 65).

Aufgabe.

§. 77. Wenn 2 Punkte A u. B gegeben sind; einen P. D zu finden, so daß DA perpendikular auf AB ist. (Fig. 27).

Auflösung.

Aus den Mittelp. A u. B, mit einem beliebigen Halbm. (z. B. AB) seien zwei Bog. beschr., welche sich in C schneiden; mit demf. Halbm. und aus dem Mittelp. C sei der Halbkr. BAD (§. 64) beschr., so ist D der gesuchte P.

Beweis. Der W. DAB ist eingeschr. u. stehet auf dem Durchm. (ein W. im Halbkr.), folgl. ist er ein rechter W. (31. B. 3).

Aufgabe.

§. 78. Wenn die beiden Endpunkte einer geraden Linie AB und ein Punkt D außerhalb

dieser Linie gegeben sind (Fig. 28), einen andern Punkt E zu finden, welcher die Lage von DE die perpendiknlar auf AB ist, und den Punkt M, wo er sie trifft, bestimmt.

Auflösung.

Es sei AD = AE, BD = BC (§. 11), so ist E der erste gesuchte P. Die Linie DE sei in M halbirt, so ist M der zweite P.

Beweis. Dieser ist in §. 14.

Aufgabe.

§. 79. Zwei Punkte von einer Linie zu finden, welche perpendikular in der Mitte von DE ist. (Fig. 28).

Auflösung.

Mache DA = EA gl. einem belieb. Halbm.; auf der andern Seite mache DB=EB gl. dems. Halbm. oder gl. jedem andern beliebigen, so sind A und B die gesuchten P.

Bew. Er ist in §. 15.

Aufgabe.

§. 80. Wenn von einer geraden Linie zwei Punkte A, B, und ein außerhalb angenommener

Punkt C gegeben sind, durch welchen man eine Parallele zu AB ziehen will: einen Punkt D zu finden, welcher die Lage derselben bestimmt. (Fig. 29).

Auflösung.

Man mache BD = CA (§. 11) CD = BA, so ist D der gesuchte P.

Beweis. In den beiden Tr. CDB, CAB deren Seiten respective gl. sind, ist W. DCB = CBA (8. B. 1.), folgl. CD parall. AB (28. B. 1.)

Aufgabe.

§. 81. Sind von einer geraden Linie (Fig. 30) zwei Punkte A, B und ein außerhalb dieser Linie angenommener Punkt C gegeben, an diesen Punkt C eine Weite CB zu legen, so daß CE parallel zu AB und gleich einer gegebenen Linie MN sei.

Auflösung.

Hat man von der durch C gehenden Prll. einen P. D gefunden (§. 80), so lege man MN in der Richtung von CD, indem man sie davon subtrahirt, wenn sie kleiner ist (§. 72), oder sie auf der andern Seite addirt (§. 72), oder sie auf CD von C nach D legt, wenn sie größer ist (§. 74), je nachdem es die Bedingungen der Aufg. erfordern.

Diese Auflösung bedarf keines Beweises.

Aufgabe.

§. 82. Prüfen (Fig. 31), ob die Punkte A, B, C in einer geraden Linie liegen.

Auflösung.

Aus den Mittelp. A, C mit einem beliebigen Halbm. (z. B. AC) seien zwei Bogen beschrieben, welche sich in D und E schneiden; nun sehe man nach, ob DB = EB; ist dieses, so sind die drei Punkte A, B, C in gerader Linie.

Beweis. Hat man noch DB = EB, so ist

$$\text{W. DAB} = \text{EAB} = \tfrac{1}{2}\,\text{DAE}$$

(8. B. 1.), denn die beiden Tr. DAB, ABE haben respective gleiche Seiten. Aber aus gleichem Grunde sind in den beiden Tr. DAC und EAC die W. DAC, EAC gleich, und folglich jeder von ihnen gleich der Hälfte des W. DAE. Daher ist

$$\text{DAB} = \text{DAC};$$

woraus folgt, daß die drei P. A, B, C in gerader Linie liegen.

Aber wenn die Linie DB größer oder kleiner ist als EB, so wird W. DAB entweder größer oder kleiner sein, als W. EAB (25. B. 1.); er könnte daher nicht gleich dem W. DAC sein, weil er nicht gleich sein kann der Hälfte des Winkels DAE;

folglich sind die drei Punkte A, B, C nicht in gerader Linie.

Aufgabe.

§. 83. Sind drei Punkte A, B und D (Fig. 32) gegeben, zu untersuchen, ob die Linie DA perpendikular auf AB ist.

Auflösung.

Es sei die L. AB in BE mittelst des Halbkr. BPQE halbirt (§. 64); man sehe nach ob DB = DE; ist dieses, so ist W. DAB ein rechter, sonst ist er es nicht.

Beweis. Da die gerade BAE der Durchm. des Kreises ist, so bildet sie mit DA zwei Winkel, deren Summe 2R. betragen (13. B. 1). Da nun ferner in den beiden Tr, DAE, DAB die Seite AE = AB und AD gemeinschaftlich ist; die Seite DE = DB, so ist W. DAE = DAB (8. B. 1.), und folglich sind sie beide R.

Wäre aber DE größer oder kleiner als DB, so wäre auch Winkel DAE größer oder kleiner als DAB; folglich würde der eine spitz und der andere stumpf sein. (25. B. 1.)

Aufgabe.

§. 84. Zu untersuchen, ob die gerade Linie, welche durch zwei gegebene Punkte D, F (Fig. 33) geht, perpendikular ist auf der geraden Linie, die durch zwei andere gegebene Punkte A, B geht.

Auflösung.

Suche mittelst des Punktes D, die DE, perpendikular auf AB (§. 78) und siehe zu, ob die drei Punkte D, E, F in einer geraden Linie sind (§. 82); liegen sie darin, so ist die Linie DF perpendikular auf AB, sonst nicht.

Beweis. DE ist in der That nach der Constr. perpendikular; wenn es DF auch ist, so wäre es dieselbe gerade Linie, weil man von einem P. D nach einer geraden AB nicht zwei Perpendikel ziehen kann. (Zusatz, Satz 32. B. 1).

Aufgabe.

§. 85. Wenn von einer geraden Linie zwei Punkte A, B (Fig. 34), und von einer andern zwei Punkte C, D gegeben sind; zu untersuchen, ob diese beiden Linien parallel sind.

Auflösung.

Es sei AE = AD und BE = BD (§. 11) gemacht,

macht, gleichfalls AF = AC u. BF = BC; man sehe nun, ob DE = CF; in diesem Falle sind die beiden Linien parll.; sonst convergiren sie nach der Seite der kleinsten.

Beweis. Die Linien DE, CF sind auf AB perpendikular, und in M und N (§. 14) halbirt: sie sind daher respective das Doppelte der Weiten DN, CN der P. D u. C in AB; sind also diese Linien gl., so sind es auch die Weiten, und folgl. AB prll. zu DC; sonst convergiren sie.

Fünftes Buch.

Von den proportionalen Entfernungen.

Aufgabe.

§. 86. Zu zwei Entfernungen Qp, MN (Fig. 35), von denen die erste Qp größer, als die zweite MN, eine dritte Proportionale zu finden.

Auflösung.

Aus dem Mittelpunkt Q mit einem Halbmesser Qp sei ein unbestimmter Bogen ApB; und aus dem Mittelp. p, mit einem Halbmesser MN sei der Halbkreis BAS beschrieben, so ist die Linie AS die dritte Proportionale.

Beweis. Nach dem Lehnsatz §. 22, ist

$$AS \cdot pQ = Ap^2.$$

Also $AS \cdot pQ = MC^2$,

folglich (17. B. 6.):

$$pQ : MN = MN : AS.$$

Aufgabe.

§. 87. Zu zwei Entfernungen Qp, MN (Fig. 36), von denen die erste kleiner als die zweite, aber doch größer als die Hälfte dieser Linie ist, eine dritte Proportionale zu finden.

Bemerk. Wir werden überzeugt sein, daß die E. Qp größer als die Hälfte von MN ist, wenn die beiden aus den Mittelp. Q u. p (welche die Endp. von der ersten Entf. sind), mit den Halbm. Qp, MN (welche die zwei gegebenen Entfernung. sind), sich, wie in der Fig. schneiden.

Auflösung.

Sie ist dieselbe, wie in der vorhergehenden Aufg. auf Fig. 36 angewandt.

Beweis. Er ist derselbe, wie der vorhergehende.

§. 88. Wenn der aus dem Mittelp. Q, mit dem Halbm. Qp beschr. Kreis pbQ' (Fig. 37) keinen Durchschnittsp. mit dem aus p mit MN beschriebene Kreis hätte, wie in Fig. 37, so würde man sich der folgenden Aufg. bedienen.

Aufgabe.

§. 89. Zu zwei Entfernungen Qp, MN, von welcher die erste kleiner als die Hälfte der

zweiten ist (Fig. 37), eine dritte Proportionale zu finden.

Auflösung.

Aus dem Mittelp. p, mit dem Halbm. MN sei ein unbestimmter Bg. BAS; und aus Q mit Qp der Halbkr. pbQ′ (§. 64): so wie aus Q′, mit Q′p ein unbestimmter Bog. beschr. Schneidet dieser Bg. den Bg. BAS in zwei Punkten B u. A, so begrenze man den Halbkr. BAS′ (§. 64); u. setze in gr. L. zu AS′ (§. 64) eine gl. gerade S′S; so ist die L. AS die dritte gesuchte Proportionale.

Beweis. Es ist (§. 22):

$$AS' \cdot pQ' = Ap^2 = MN^2.$$

Aber $pQ' = 2pQ.$

Folglich $2AS' \cdot pQ = MN^2;$

oder auch $AS \cdot pQ = MN^2,$

woraus (17. B. 1.):

$$pQ : MN = MN : AS.$$

§. 90. Sollte jedoch (Fig 38) der aus Q′ mit Qp beschr. Bg. pcQ″, den aus p mit MN beschr. Bg. BAS schneiden, so begrenze man den Halbkr. pcQ″, und beschr. aus Q″ mit Q″p einen unbestimmten Bg.; schneidet er den Bog. BAS in den zwei P. A u. B, so begrenze man den Halbkr. BAS′ (§. 64); vervierfache AS′ (§. 65), und mache $AS = 4AS'$. Diese L. ist die dritte gesuchte Proportionale.

Beweis. Man hat in der That (§. 22):

$$AS' \cdot pQ'' = Ap^2 = MN^2,$$

und $4AS' \cdot pQ = MN^2 = AS \cdot pQ.$

Woraus (16. B. 6):

$$pQ : MN = MN : AS.$$

§. 91. Auf dieselbe Weise verfährt man, wenn selbst die Entfernung Q″p größer als die Hälfte von MN ist; d. h., man nähme eine Entfernung gl. dem Doppelten dieser Linie, achtmal größer als Qp, und verachtfachte die eben bestimmte AS. Diese Entfernung das achtfache von AS′ würde die dritte gesuchte Proportionale sein, u. s. w.

Der Beweis ist wie der vorhergehende.

§. 92. In dem Falle, wo die erste Entfern. Qp etwas größer sein würde, als die Hälfte von der zweiten MN, müßte man diese Entfernung verdoppeln, damit die Durchschn. der beiden Kr. minder spitzwinklig, sondern mehr rechtwinklig sich schneiden. (§. 9).

Aufgabe.

§. 93. Zu drei Entfernungen PQ, RS, TV (Figur 32.), eine vierte Proportionale zu finden.

Auflösung.

Aus demselben Mittelp. O und mit den beiden

erstern Entf. PQ und RS, als Halbm. genommen, beschreibe man die beiden Kreise BC, DE; mit einem der dritten Entf. TV gleichen Halbm., und aus irgend einem P. B in der ersten Peripherie, beschr. man einen Kreisbog., welcher sie in C schneidet; aus demselben P. B, mit einem beliebigen Halbm., beschr. man noch einen Kreisbog., welcher die zweite Periph. in D schneidet; mit demselben Halbm. BD, und aus dem Mittelp. C schneidet man dies. Prph. in E; verbinde die beiden P. durch DE, so ist sie die vierte gesuchte Proportionale.

Beweis. Die Tr. COE, BOD, haben unter sich gleiche Seiten, folglich

W. COE = BOD (8. B. 1);

schneidet man den gemeinsch. Wink. BOE ab (oder setzt ihn hinzu), so ist

COB = EOD.

Folgl. OCB + OBC = OED + ODE (32. B. 1.) Aber die beiden Tr. COB, EOD sind gleichschenkl.: daher sind die halben Summen, d. h. die W. an der Grundl. gleich. Folglich sind diese beiden Tr. ähnl., und es ist:

CO : DO = CB : DE;

oder auch: PQ : RS = TV : DE.

§. 94. Bemerk. I. Es ist dienlich, den beliebigen Halbm. BD so zu nehmen, daß der W.

BDO nahe ein R. ist: dieß geschiehet nach dem Augenmaße.

§. 95. Bemerk. II. Wenn die dritte Entf. TV nicht auf BC als Sehne getragen werden kann, welches geschiehet, wenn TV größer ist als 2PQ, so muß man die beiden Entf. PQ u. RS (§. 64) verdoppeln, mit diesen beiden so verdoppelten Entf., die beiden Kr. BC, DE beschreiben, und die Constr., wie oben, vollenden (§. 93). Wenn dieß noch nicht hinreicht, so muß man sie verdreifachen, u. s. w., selbst wenn man TV als Sehne in dem ersten Kr. tragen kann; ist sie dem Durchm. dieses Kr. beinahe gl., so muß man diese Entf. verdoppeln oder verdreifachen, um die spitzwinkligen Durchschnitte zu vermeiden, und andere zu erhalten, die sich dem rechtwinkligen mehr nähern.

Der Beweis gründet sich auf folgende Proportion:

PQ : RS = 2PQ : 2RS = 3PQ : 3RS u. s. w.

Folgl., wenn man

BC : DE = 2PQ : 2RS = 3PQ : 3RS u. s. w.

gemacht hätte, welches aus der Construktion folgt: so wäre auch:

PQ : RS = BC : DE; oder

oder PQ ; RS = TV : DE (4. B. 5).

Aufgabe.

§. 96. Die gerade Linie MN in P nach zwei gegebenen Entfernungen PQ, RS in proportionalle Theile zu theilen. (Fig. 40).

Auflösung.

Traget auf die Verlängerung von PQ, die QV = RS (§. 73); sucht eine vierte Proport. zu den dreien Linien PV, MM, PQ (§. 93): traget MP auf MN, indem man sie von MN abzieht (§. 72); der P. P, wohin sie fällt, wird der gesuchte P. sein.

Beweis. Nach der Konstrukt. ist:

PV : MN = PQ : MP.

Man hat also auch (5. B. 5.)

PV : MN = QV : PN;

Hieraus: PQ : MP = QV : PN,

oder auch PQ : QV = MP : PN;

und wenn man für QV ihren Werth setzt:

PQ : RS = MP : PN.

Aufgabe.

§. 97. Die gerade Linie AB (Fig. 41) in mittlere und äußere Verhältniß zu theilen.

Auflösung.

Aus A mit AB beschr. den Kr. BDd. In seine Peripherie sei

$$BC = CD = DE = Ed = AB,$$

getragen; machet

$$Ba = Ea = BD,$$

und $Eb = db = Aa$;

so wird AB in b in mittlere und äußere Verhältniß getheilt sein, und man hat

$$AB : Ab = Ab : bB.$$

Beweis. Siehe §. 46.

§. 98. Diese letztere Aufg. ist auch noch eine von denen, welche man mittelst des Zirkels weit einfacher als mit dem Lineal und Zirkel vereint, löset. Man kann sich davon überzeugen, wenn man diese Aufl. mit denen in den gewöhnlichen geometr. Lehrbüchern gegebenen vergleicht.

Der Beweis ist übrigens viel zusammengesetzter.

Aufgabe.

§. 99. **Eine mittlere Proportionale zwischen den gegebenen Entfernungen AB und CD zu finden.** (Fig. 42).

Auflösung.

Auf die gerade Linie AB, tragt CD von B in H (§. 73); halbirt, AH in F (§. 66); verlängert BF um $Bf = BF$ (§. 64). Aus F und f beschreibet mit AF zwei Kreise, welche sich in M schneiden, so ist BM die verlangte mittlere Proportionale.

Beweis. Da die Punkte f, B, F in derselben geraden HA liegen, und die Seiten der Triangel MBf, MBF einander gleich sind, so ist

W. MBF = MBf (8. B. 1),

und folglich jeder dieser Winkel ein R. (13. B. 1.); also MB ein Perpendikel auf den Durchm. des Halbkr. HMA. Woraus (13. B. 6.)

AB : BM = BM : BH,

oder auch AB : BM = BM : CD.

Sechstes Buch.

Von den Wurzeln.

Aufgabe.

§. 100. Die Wurzeln der ganzen Zahlen von eins bis zehn leicht zu finden; die Entfernung AB als Einheit angenommen. (Fig. 43).

Auflösung.

Mit dem Halbmesser AB beschreibet den Kreis BDd; macht

$$BC = CD = DE = Ed = dc = AB;$$

aus B u. E, mit BD beschr. die Kreisbogen, welche sich in a u. α schneiden; mit demselben Halbm. BD, aus D, d beschreibt die Kreisbogen, die sich in V treffen. Mit Aa schneidet aus B die Peripherie in F; aus B u. F mit AB beschreibet zwei Kreisbogen, die sich in T treffen; so hat man:

$AB = \sqrt{1}$ $aV = \sqrt{6}$
$Aa = \sqrt{2}$ $CV = \sqrt{7}$
$BD = \sqrt{3}$ $a\alpha = \sqrt{8}$
$BE = \sqrt{4}$ $BV = \sqrt{9}$
$ET = \sqrt{5}$ $TV = \sqrt{10}$.

Beweis. Wir haben (§. 27) bewiesen, daß $Aa^2 = 2$; daher $Aa = \sqrt{2}$. Man weiß auch (§. 2) daß $BD = \sqrt{3}$; endlich $BE = 2 = \sqrt{4}$.

Die Dr. BTA, TAF haben unter einander gl. Seiten; also W. BTA = TAF (8. B. 1.) und folgl. BT parallel zu FA (28. B. 1.): demnach ist BT perpendikular auf BA, so wie FA (§. 27) (27. B. 1.): ferner, da die Punkte A, E und auch B, V gleich weit von D, d sind; so folgt hieraus, daß die vier P. B, A, E, V in einerlei gerade L. liege, u. EV = BA (§. 14). Folglich:

$$ET^2 = TB^2 + BE^2 \text{ (47. B. 1.)}$$
$$= AB^2 + 4AB^2 = 5.$$

Woraus: $CE = \sqrt{5}$. Gleichfalls ist

$aV^2 = Aa^2 + AV^2$, und da
$EV = BA$, so ist auch
$AV = BE = 2AB$; woraus
$AV^2 = 4AB^2 = 4$.

Es ist ferner $Aa^2 = 2$ (§. 27); folglich $aV^2 = 6$, $aV = \sqrt{6}$. Vergleicht man nun die P. C, B, c, A, V mit den Punkten A, p, B, P, Q in Fig. 3, und substituirt in der Gleichung

$AQ^2 = Ap^2 + pQ \cdot PQ$ (§. 18);
so hat man:
$CV^2 = CB^2 + BV \cdot AV = 1 + 3 \cdot 2 = 7.$
Woraus: $CV = \sqrt{7}$; und da $Aa = A\alpha$ (§. 14), so ist auch:
$$a\alpha^2 = 4Aa^2 = 8.$$
Woraus: $a\alpha = \sqrt{8}$.
Nachgehends hat man
$$BV = 3 = \sqrt{9}.$$
Endlich ist auch:
$$TV^2 = TB^2 + BV^2 = 1 + 9 = 10;$$
folgl. $TV = \sqrt{10}$.

Aufgabe.

§. 101. Mittelst der in der vorigen Aufgabe gefundenen Wurzeln, die andern Wurzeln der ganzen Zahlen, von 10 bis 36 zu finden. (Fig. 44).

Auflösung.

Man subtrahirt die Zahl, aus welcher man die Wurzel haben will, von der nächst größern Quadratzahl, die entweder, 16, oder 25, oder 36 sein wird; mit der Wurzel des Restes, den man nach (§. 100) findet. als Halbm. beschr. man aus A den Halbkr. QLR (§. 64); mit der Wurzel der nächst größern Quadratzahl, als Halbm. (man wird sie mit Hülfe

§. 65 finden) beschr. aus Q u. R zwei Bg., welche sich in P schneiden; so wird AP die gesuchte Wurzel sein.

Z. B.: wenn man die Wurzel aus 29 verlangt, so hat man $36 - 29 = 7$; mit dem Halbm. CV $= V7$ (§. 100), beschr. man den Halbkr. QLR; aus Q, R, mit einem Halbm. $= 6$, zeichne man zwei Bg. die sich in P schneiden, dann wird $AP = V29$ sein.

Beweis. Da Winkel PAQ = R (§. 83), so ist:

$$PQ^2 = AQ^2 + AP^2 \text{ (47. B. 1.)}:$$

hieraus $PQ^2 - AQ^2 = AP^2$.

Nehmen wir nun $PQ^2 = 36$, und setzen nach und nach AQ^2 gleich den zwischen 1 und 10 liegenden ganzen Zahlen, so wird AP^2 nach und nach gleich den Quadratzahlen von 36 bis 25. Folgl. hat man successive für AP die Wurzeln aller dieser Zahlen. Aber die Wurzel von 25 ist 5 (§. 65); setzt man also $PQ^2 = 25$, so hat man auf gl. Weise die Wurzeln von 25 bis 16; und macht man $PQ^2 = 16$, so hat man die andern Wurzeln von 16 bis 10.

In dem von uns gewählten Beisp. ist nun:

$$PQ^2 - AQ^2 = 36 - 7 = AP^2 = 29:$$

folgl. $AP = V29$.

Aufgabe.

§. 102. Die Wurzeln aller ganzen Zahlen zu finden.

Auflösung.

Es ist offenbar, daß bei Anwendung derselben Methode (§. 101) man mit den bereits gefundenen Wurzeln die andern Wurzeln der höhern Zahlen und mittelst dieser bis ins Unendliche fortfahren kann. Wir sind also schon im Besitz der Mittel, die Wurzeln aller ganzen Zahlen zu finden.

Aufgabe.

§. 103. Die Wurzel einer jeden gebrochenen Zahl zu finden.

Auflösung.

Suchet die Wurzel des Nenners (§. 102), dann die des Zählers, und machet diese Proportion:

Die erste Wurzel verhält sich zur zweiten, wie die Einheit zu einer vierten Proportionale (§. 93); dieses vierte Glied ist die gesuchte Wurzel.

Beweis. Gesetzt es sei d der Nenner, und n der Zähler; macht man nun diese Proportion:

$\sqrt{d} : \sqrt{n} = 1 :$ einer 4ten Proportionale $= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{d}}$.

Aber $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{d}} = \sqrt{\frac{n}{d}}$: folgl. u. s. w.

Aufgabe.

§. 104. Die Hälfte der Wurzeln ganzer Zahlen von 1 bis 25 leicht zu finden. (Fig. 45).

Auflösung.

Mit dem Halbm. AB = 1, sei aus A der Kr. BDd beschr., und in seinem Umfange sei

BC = CD = CD = DE = Ed = AB.

Aus B, mit dem Halbm. Bd sei ein Bog. beschr. welcher durch die Punkte a, N, D, d, n, α geht.

Mit demselben Halbm., aus E ein Bogen, der durch die Punkte a, M, C, m, α geht.

Mit Aa, aus B ein Bogen, der durch die P. M, F, Q, p, m geht.

Eben so mit demselben Halbm., aus E ein Bog. der durch die P. N, F, P, p, n geht.

Mit AB, aus B sei ein Bg. beschr. welcher durch die Punkte P u. p geht.

Mit dems. Halbm., aus E ein Bog., der durch Q u. q geht.

Mit dems. Halbm. aus P, ein Bog., der durch R geht, und die Periph. in S schneidet; aus p sei

ein

ein anderer Bog. beschr., welcher den ersten in R, u. die Periph. in S trifft.

Mit demf. Halbm. beschr. man aus Q u. q zwei Bg., welche sich in T, und die Peripherie in O u. o schneiden.

Mit demselben Halbm. aus α sei ein Bog. beschrieben, welcher die Peripherie in g trifft; aus R, ein Bog., der die Peripherie in L und l schneidet; aus O und o zwei Bogen, welche sich in H treffen; aus H u. T, zwei Bog. welche sich in V u. v schneiden, so wird man haben:

$RA = \frac{1}{2}V1$	$EO = \frac{1}{2}V14$
$RQ = \frac{1}{2}V2$	$Ll = \frac{1}{2}V15$
$RD = \frac{1}{2}V3$	$BE = \frac{1}{2}V16$
$RP = \frac{1}{2}V4$	$Ha = \frac{1}{2}V17$
$RF = \frac{1}{2}V5$	$HN = \frac{1}{2}V18$
$AM = \frac{1}{2}V6$	$HD = \frac{1}{2}V19$
$Qq = \frac{1}{2}V7$	$ag = \frac{1}{2}V20$
$Aa = \frac{1}{2}V8$	$dV = \frac{1}{2}V21$
$BR = \frac{1}{2}V9$	$HS = \frac{1}{2}V22$
$BL = \frac{1}{2}V10$	$Mm = \frac{1}{2}V23$
$pS = \frac{1}{2}V11$	$Mn = \frac{1}{2}V24$
$BD = \frac{1}{2}V12$	$HE = \frac{1}{2}V25.$
$HF = \frac{1}{2}V13$	

Beweis. Vergleicht man die P. P, B, p, R, E dieser Figur mit den P. A, p, B, P, Q in Fig. 3 mittelst der Gleichung §. 18.

$$AQ^2 = Ap^2 + pQ \cdot PQ;$$

so bekommt man für diese Fig.:

$$PE^2 = PB^2 + BE \cdot RE;$$

oder: $Aa^2 = AB^2 + 2AB \cdot RE;$

oder auch (§. 27) $2 = 1 + 2RE$, daraus folgt:

$$RE = \tfrac{1}{2}AE;$$

und weil der Punkt R in derselben geraden BAE ist (§. 13): so ist auch:

$$RA = \tfrac{1}{2}AE = \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{1}.$$

Da nun der P. T in der Mitte von AB, aus denselben bewiesenen Gründen ist, als P, in der Mitte von AE, so ist AT = RE; woraus, wenn man die Punkte Q, T, q, E, R dieser Fig. 45, mit den Punkten A, q, B, Q, P, in Fig. 3 vergleicht, ersiehet, daß der P. A in Fig. 45, der P. p in Figur 3 ist. Folglich zieht man aus der Gleich. §. 16

$$AQ^2 = AP^2 + PQ^2 + Pp \cdot PQ$$

für diese Fig. 45, die Gleichung:

$$QE^2 = RQ^2 + RE^2 + AR \cdot RE;$$

und wenn man dafür die Zahlenwerthe setzt:

$$1 = RQ^2 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}:$$

woraus: $RQ^2 = \tfrac{1}{4} \cdot 2$; $RQ = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$.

Vergleicht man die P. D, A, d, E in Fig. 45, mit den Punkten P, A, p, B in Fig. 3, so bleibt (§. 14) bewiesen, daß die beiden geraden Linien AE, Dd, sich wechselseitig halbiren. Aber AE ist in R halbirt, also ist es Dd auch.

Aber $Dd = BD = \sqrt{3}$ (§. 2); mithin $RD = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Man erinnere sich, daß DRd auch perpendik. auf AE (§. 14) ist, demnach $RP = 1$, also $RP = \frac{1}{2}\sqrt{4}$.

Da nun W. $FAR = R$; so ist:

$$RF^2 = FA^2 + AR^2 = 1 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{5}{4};$$

folgl.: $RF = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Die Grundlinie BAE des Tr. BME ist durch AM halbirt (§. 26). Man hat also:

$$BM^2 + EM^2 = 2AB^2 + 2AM^2;$$

d. h., $Aa^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AM^2$;

oder auch: $2 + 3 = 2 + 2AM^2$;

woraus: $6 = 4AM^2$,

$$\sqrt{6} = 2AM,$$

$$AM = \tfrac{1}{2}\sqrt{6}.$$

Aus der oben gemachten Vergleichung der P. Q, T, p, E, R, A in Fig. 45, mit den P. A, q, B, Q, P, p, in Fig. 3, geht hervor (§. 13), daß man in Fig. 45 hat:

$$AQ = Aq = QR = Rq.$$

Man wird nun aus denselben Gründen sehen, daß AP, Ap, PT, Tp unter sich gleich sind, und gleich den 4 Linien AQ, Aq, QR, Rq. Da also die Seiten der gleichschenkl. Tr. PTA, QAR unter sich gl. sind, so ist W. $PAT = QRA$ (8. B. 1); und da die Linie TAR eine gr. L. ist, so wird PA parallel zu QR sein (29. B. 1); woraus man auch sieht, daß PQ gleich und parallel zu AR (33. B. 1).

Aber Qq ist perpend. auf AR (§. 14); folglich auch auf PQ (27. B. 1). Ferner sind in den Tr. PAT, RAq, die beiden W. PAT, RAq gl. (8. B. 1), und die L. TAR eine gerade L. Da nun die beiden W. PAT u. PAR gleich 2R. (13. B. 1), so werden es auch die beiden W. PAR u. RAq sein. Woraus folgt, daß auch die Linie PAq eine gerade Linie ist (14. B. 1.); folgl.:

$$Pq^2 = 2RQ^2 = PQ^2 + Qq^2$$

(47. B. 1.), d. h.

$$2 = \tfrac{1}{4} + Qq^2;$$

woraus: $\tfrac{7}{4} = Qq^2$ u. $Qq = \tfrac{1}{2}\sqrt{7}$.

Ferner ist:

$$Aa^2 = 2 \text{ (§. 27)} = \tfrac{8}{4}; \text{ also}$$

$$Aa = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{8}.$$

Auch hat man:

$$BR = \tfrac{3}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{9}.$$

Vergleicht man nun die Punkte B, L, R, l, A in Fig. 45 mit den P, Q, A, p, B, P in Fig. 3, so wird man aus der Gleichung:

$$AQ^2 = AP^2 + PQ^2 + Pp \cdot PQ \text{ (§. 16)},$$

für Fig. 45 die Gleich. ziehen:

$$BL^2 = LA^2 + AB^2 + AR \cdot AB;$$

oder auch:

$$BL^2 = 1 + 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{10}{4}: \text{ woraus}$$

$$BL = \tfrac{1}{2}\sqrt{10}.$$

Die beiden Tr. PSA u. PBA haben respective gleiche Seiten; also ist W. SPA = PAB (8. B. 1). Daher sind die L. PS, BA parallel (28. B. 1). Aber Pp schneidet BR rechtwinkl. (§. 14); folgl. wird sie auch perpend. auf PS sein (27. B. 1). Man wird nachgehends auf dieselbe Art, als man bewiesen hat, daß $Qp^2 = \frac{7}{4}$, zeigen, daß $Pp^2 = \frac{7}{4}$ ist. Woraus, wegen

$$pS^2 = Pp^2 + PS^2$$

(47. B. 1.); man haben wird

$$pS^2 = \frac{7}{4} + 1 = \frac{11}{4};$$

woraus $pS = \frac{1}{2}\sqrt{11}$.

Es ist also: $BD^2 = 3$ (§. 2) $= \frac{12}{4}$;

woraus $BD = \frac{1}{2}\sqrt{12}$.

Auch ist: $HF^2 = HA^2 + AF^2$;

und indem man nach derselben Art, wie es für PS geschehen, beweist, daß QC parallel zu BE ist, so sind die P. O, P, Q, S in derselben geraden Linie; und es ist

$$PO = QO - PQ = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = PQ.$$

Da nun OP gleich und parall. zu AT u. zu TB ist, so sind die Linien OT, PA auch gleich und parallel, so wie die Linien OB, PT (33. B. 1). Es ist aber oben bewiesen, daß PT = PA. Mithin sind auch OT u. OB diesen Linien gleich. Aus denselben Grün-

den werden auch die Linien oT, oB auf der andern Seite gleich sein pA = PA. Wenn man nun jetzt die P. O, o, A, T, B, H mit den P. A, B, Q, P, p, q in Fig. 3 vergleicht, so folgt, daß (§. 14)

$$HB = AT = \tfrac{1}{2}.$$

Es ist also $HA^2 = (\tfrac{3}{2})^2 = \tfrac{9}{4}$;

woraus $HF^2 = \tfrac{9}{4} + 1 = \tfrac{13}{4}$;

und $HF = \tfrac{1}{2}\sqrt{13}$.

Vergleicht man die P. E, O, H, o, A mit den P. Q, A, p, B, P in Fig. 3, so zieht man aus der Gleichung:

$$AQ^2 = AP^2 + PQ^2 + Pp \cdot PQ \quad (§.\ 16)$$

für Fig. 45:

$$EO^2 = OA^2 + AE^2 + HA \cdot AE$$
$$= 1 + 1 + \tfrac{3}{2} = \tfrac{7}{2} + \tfrac{14}{4};$$

woaus: $EO = \tfrac{1}{2}\sqrt{14}$.

Vergleicht man nun die P. A, R, L, Q, q, l in Fig. 45, mit den P. A, B, Q, P, p, q in Fig. 3, so hat man (§. 15) für Fig. 3 die Gleichung:

$$QM^2 = AQ^2 - AM^2;$$

und mit 4 multiplicirt,

$$4QM^2 = 4AQ^2 - 4AM^2,$$

oder $Qq^2 = 4AQ^2 - AB^2$;

und für die Fig. 45 ergiebt sich:

$$Ll^2 = 4AL^2 - 4AR^2 = 4 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{15}{4},$$

woraus $Ll = \tfrac{1}{2}\sqrt{15}$.

Man hat nachgehends:

$$BE = 2 = \tfrac{1}{2} \cdot 4 = \tfrac{1}{2}\sqrt{16}.$$

Da nun der W. aAH ein R. (§. 27), so ist:

$$Ha^2 = HA^2 + Aa^2 = (\tfrac{1}{2})^2 + 2 = \tfrac{17}{4},$$

woraus: $Ha = \tfrac{1}{2}\sqrt{17}$.

Nun zeigt man, eben so wie für AM^2 geschehen, daß $AN^2 = \tfrac{3}{2}$, und daß auch $An^2 = \tfrac{3}{2}$ ist; und da NR die Grundlinie AE des Tr. ANE halbirt, so ist (§. 26): $AN^2 + NE^2 = 2AR^2 + 2RN^2$;

$$\text{d. h. } \tfrac{3}{2} + 2 = \tfrac{2}{4} + 2\,RN^2;$$

dieß reducirt, giebt:

$$RN^2 = \tfrac{1}{2} = AN^2.$$

Eben so findet man, daß $Rn^2 = \tfrac{1}{2}$.

Vergleicht man jetzt die P. H, N, R, n, A in Fig. 45, mit den P. Q, A, p, B, P in Fig. 3, so ergiebt sich aus der Gleichung:

$$AQ^2 = AP^2 + PQ^2 + Pp \cdot PQ \text{ (§. 16)},$$

für Fig. 45 die Gleichung:

$$HN^2 = AN^2 + AH^2 + AR \cdot AH;$$

$$\text{d. h. } HN^2 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{9}{4} + \tfrac{3}{4} = \tfrac{18}{4};$$

woraus dann folgt, daß

$$HN = \tfrac{1}{2}\sqrt{18} \text{ ist.}$$

Da nun die Linie DR perpendikular auf AE, d. h. auf HR ist, so hat man:

$$HD^2 = HR^2 + RD^2 \text{ (47. B. 1.)}$$

$$= 4 + \tfrac{3}{4} = \tfrac{19}{4};$$

woraus $HD = \tfrac{1}{2}\sqrt{19}$.

Da die Grundl. aAα des Tr. agα durch gA halbirt ist, so wird man haben: (§. 26):

$$ag^2 + \alpha g^2 = 2Aa^2 + 2Ag^2,$$

$$\text{oder } ag^2 + 1 = 4 + 2;$$

$$\text{und } ag^2 = 5 = \tfrac{20}{4};$$

$$\text{woraus } ag = \tfrac{1}{2}\sqrt{20}.$$

Da die beiden Tr. HTV u. AED respective gleiche Seiten haben, so ist W. VTH = DEA (8. B. 1), und da die P. H, T, A, E in gr. L. liegen, so wird VT parallel und gleich DE sein (29. B. 1.): daher ist auch VD prll. und gleich TE (33. B. 1). Aber Dd ist perpend. auf AE, d. h. auf TE; folgl. ist sie es auch auf VD (27. B. 1.): woraus:

$$dV^2 = VD^2 + Dd^2 = TE^2 + BD^2 = (\tfrac{3}{2})^2 + 3 \text{ (§. 2)}$$

$$= \tfrac{9}{4} + \tfrac{12}{4} = \tfrac{21}{4}, \text{ also: } dV = \tfrac{1}{2}\sqrt{21}.$$

Wenn bewiesen, daß PS gleich u. parallel zu AE, so wie ps aus denselben Gründen, so wird auch SE gl. und prll. zu AP sein (33. B. 1), eben so wie es SE zu Ap ist. Wegen der Gleichheit und wegen des Parallelismus der drei geraden L. PS, TR, Ps wird man eben so die Gleichheit von RS, Rs mit den L. PT, pT beweisen, deren Gleichheit mit AP = RQ schon dargethan.

Vergleicht man jetzt die P. H, S, E, s, R dieser Fig. 45, mit den P. Q, A, p, B, P in Fig. 3, so wird man aus der Gleichung:

$$AQ^2 = Ap^2 + pQ \cdot PQ \cdot PQ \text{ (§. 18)};$$

für Fig. 45 folgern:

$$HS^2 = SE^2 + EH.RH = RQ^2 + EH.RH$$
$$= \tfrac{2}{4} + \tfrac{5}{2}.2 = \tfrac{22}{4};$$

woraus: $HS = \tfrac{1}{2}\sqrt{22}$.

Da die Grundl. AE des Tr. AME durch MR halbirt ist, so hat man (§. 26):

$$AM^2 + EM^2 = 2RA^2 + 2RM^2,$$

d. h. $\tfrac{6}{4} + 3 = \tfrac{3}{4} + 2RM^2$:

woraus nach der Reduction folgt, daß

$$RM^2 = 2 = BM^2 = Bm^2.$$

Aus diesem Werthe leitet man auf dieselbe Weise den von Rm^2 ab; daher

$$BM = MR = Rm = mB.$$

Vergleicht man jetzt die vier P. B, M, R, m in Fig. 45, mit den vier P. A, Q, B, q in Fig. 3, so hat man (§. 15):

$$QM^2 = AQ^2 - AM^2;$$

und hieraus: $4QM^2 = 4AQ^2 - 4AM^2$;

d. h. $Qq^2 = 4AQ^2 - AB^2$;

man wird für Fig. 45 haben:

$Mm^2 = 4BM^2 - BR^2 = 8 = (\tfrac{3}{2})^2 = \tfrac{32}{4} - \tfrac{9}{4} = \tfrac{23}{4}$;

woraus $Mm = \tfrac{1}{2}\sqrt{23}$.

Da die Triangel BME, BnE unter sich gleiche Seiten, und beide die gemeinsch. Grundl. BE haben, welche durch die Linien Am, An halbirt ist, so wird aus der Gleich. (§. 26) derselbe Werth für AM

und An hervorgehen; folgl., da die Tr. BAM und Ean unter sich gleiche Seiten haben, so wird W. BAM = EAn sein (8. B. 1). Woraus, weil BAE eine gerade Linie, die Summe der W. MAB, MAE gleich 2R (13. B. 1) ist, und setzt man für den W. MAB, seinen ihm gleichen W. EAn, so wird die Summe der beiden W. MAE, EAn gleich 2R sein; woraus folgt, daß die beiden Linien MA, An eine gerade Linie ausmachen (14. B. 1).

Man wird also haben:

$$Mn^2 = 4AM^2 = \tfrac{24}{4};$$

daher $Mn = \frac{1}{2}\sqrt{24}$.

Endlich $HE = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{25}$.

§. 105. Da nun $\frac{1}{2}\sqrt{n} = \sqrt{\frac{n}{4}}$;

z. B. $\frac{1}{2}\sqrt{7} = \sqrt{\frac{7}{4}}$ u. s. w.,

so wird man mittelst dieser Aufg. leicht die Wurzeln aller Viertel von 1 bis 25 finden: wovon man, wie wir sehen werden, in der Construct. ähnl. Figuren Gebrauch machen.

§. 106. Hätte man den Halbm. AB = 2 angenommen, so würde man alle diese Entfernungen verdoppelt gehabt haben; woraus sich alle Wurzeln der ganzen Zahlen von 1 bis 25 ergeben. Man würde also leicht irgend eine von diesen halben Wurzeln verdoppeln können, um die ganze Wurzel zu bekommen. (§. 64).

§. 107. Die Leichtigkeit dieser Construction, die man mit den drei schon bemerkten Oeffnungen allein ausführt (§. 35) nämlich:

die erste $= V1$;
die dritte $= V2$;
die zweite $= V3$,

mit welchen man schon den Kreis in 24 gleiche Theile getheilt, und dann die 25 Wurzeln der ersten auf einander folgenden Zahlen gefunden hat, zeigt die Vorzüglichkeit der Geometrie des Zirkels, und zugleich wie viel dieselbe zur Vervollkommnung der Künste beitragen kann.

§. 108. In der vorhergehenden Construction hat man mit Sorgfalt gesucht, so oft als möglich den ersten Zirkel anzuwenden, dessen Oeffnung $= 1$, mit welchem der Umfang BDd beschrieben worden, u. der, seine Fundamental-Oeffnung beibehaltend, mehr Vertrauen als die andern verdient. Dieß ist auch der Grund, warum man nur die drei ersten Zirkel als die merkwürdigsten anwenden wollte (§. 107); daher es denn auch kam, daß einige der Bog.-Durchschnitte etwas spitzwinklig ausfielen, wie die in den Punkten S, s, O, o, und besonders die der P. L und l. Wollte man alle Winkel-Durchschnitte mehr rechtwinklig haben, so könnte man die folgende Construction anwenden.

Andere Construction der Figur 45.

§. 109. Nachdem man die Punkte M und m wie in der Auflösung (§. 104) gefunden hat; so beschreibe man mit BD, aus M und m zwei Bogen, die sich in H schneiden.

Mit dem Halbmesser AB, aus H, sei ein Bogen beschrieben, welcher die Peripherie in O und o schneidet; mit demselben Halbmesser seien die Halbkreise OEs, oES (§. 64) bestimmt; mit dem Halbmesser BE, sei aus H ein Bogen beschrieben, welcher die Peripherie in L und l schneidet.

Alle andere Punkte der Figur werden wie in §. 104 gefunden.

Beweis. Wir werden beweisen, daß die P., welche man mit dieser Construction findet, einerlei sind mit den durch die erstere gefundenen.

Nachdem bewiesen worden (§. 104), daß

$$BM = MR = Rm = mB,$$

und daß die drei Punkte B, A, R in einerlei geraden Linie sind, überdies nach der Construction auch

$$MH = ME = mH = mE,$$

so liegt H in derselben geraden Linie BAR (§. 13), und man wird haben:

$$HB = RE \text{ (§. 14)}:$$

folglich wird der Punkt H derselbe, als in der andern Constr. sein.

Nun sind die Linien HO, Ho in beiden Constructionen einander gleich, folglich auch die Punkte O und o dieselben. Wenn man nun den Bogen osE von den beiden Halbkr. BsE, oES abzieht, so bleiben die gleichen Bogen Bo, ES. Woraus:

$$ES = Bo = BO = AQ = RQ:$$

daher wird auch der P. S derselbe, als in der ersten Constr. sein; der P. s wird es ebenfalls sein; da ferner die Grundlinie HTR des Tr. HLR durch LT halbirt ist, so wird man haben (§. 26)

$$HL^2 + LR^2 = 2HT^2 + 2TL^2;$$

d. h. $4 + LR^2 = 2 + 2TL^2;$

oder auch $2 + LR^2 = 2TL^2.$

Nun ist aber noch die Grundlinie TR des Tr. TLR im Punkt A durch die gerade LA halbirt, also ist (§. 26):

$$TL^2 + LR^2 = 2TA^2 + 2AL^2,$$

und verdoppelt:

$$2TL^2 + 2LR^2 = 4TA^2 + AL^2 = 1 + 4 = 5;$$

nimmt man nun $2LR^2$ davon ab, so ist:

$$2TL^2 = 5 - 2LR^2.$$

Man hat aber oben gefunden:

$$2TL^2 = 2 + LR^2,$$

also: $5 - 2LR^2 = 2 + LR^2.$

Subtrahirt man 2, und addirt $2LR^2$, so hat man:

$$3 = 3LR^2;$$

woraus: $1 = LR^2 = AB^2$.

Folglich ist $LR = AB$, wie in der ersten Construction. Dasselbe beweist man auch für Rl; die andern Punkte sind wie in der vorhergehenden Constr. bestimmt. Folgl. sind alle P. der Figur dieselben, wie in dieser Construction.

Siebentes Buch.

Von der Schneidung gerader Linien mit Kreisbogen und unter sich.

Aufgabe.

§. 110. Sind zwei Punkte L und M von einer geraden Linie (Fig. 46), und der Mittelpunkt A mit dem Halbmesser AB eines Bogens BCD gegeben, die beiden Punkte P und Q zu finden, in welchen die Linie LM den genannten Bogen, wenn sie ihn sonst trifft, schneidet.

Auflösung.

Aus den auf der geraden L. gegebenen P. L u. M, als Mittelpunkt, und mit ihren respectiven Entfernungen MA, LA als Halbmesser seien zwei Bogen beschrieben, die sich in V schneiden. Aus dem Mittelpunkt V, mit dem gegebenen Halbmesser AB, sei ein unbestimmter Bg. EFG beschrieben; wenn

dieser Bogen den gegebenen in P und Q schneidet, so sind diese beiden Punkte die gesuchten; schnitten sie ihn nicht, so wird auch die gerade LM den gegebenen Bog. nicht schneiden.

Beweis. Da die vier Weiten AP, AQ, VP, VQ unter sich gleich, und die beiden andern AM, VM auch unter sich gleich sind, so liegen die drei P. P, M, Q in einerlei geraden L. (§. 13). Eben so zeigt man, daß die drei P. Q, P, L, in einerlei geraden Linie sind: folgl. geht die gerade LM durch die P. P und Q, wenn sich daselbst diese Durchschnittsp. befinden.

Wenn der aus dem Mittelpunkt V (Fig. 47) mit dem Halbm. AB beschriebene Kreis den Kreis BCD nicht trifft, so würde LM denselben Kreis nicht schneiden. Zieht man nämlich die gerade Linie VA, welche die Kreise in C und F schneidet, halbirt CF in m, so wäre Vm = mA. Folglich wird LM die VA in m winkelrecht (§. 14) außerhalb des Kreises BCD schneiden. Nimmt man irgend einen andern Punkt P auf der geraden Linie LM, so wird, in dem rechtwinkl. Tr. PmA, die Seite PA größer als mA sein, weil sie einem größern Winkel gegenübersteht (32 u. 18. Buch 1). Folglich wird P viel weiter außerhalb des Kreises, als der P. m liegen: demnach wird die gerade LM in keinem P. den Kr. BCD treffen.

Auf-

Aufgabe.

§. 111. Es sei (Fig. 48) ein aus A beschriebener Bogen BCD gegeben; die beiden Punkte zu finden, in welchen die Peripherie durch die durch A und durch einen andern gegebenen Punkt L gehende Linie geschnitten wird.

Auflösung.

Aus dem Mittelpunkt L, mit einem beliebigen Halbmesser LP, sei ein Bogen beschrieben, welcher den Bogen BCD in P und Q schneidet; es sei der Bogen in m halbirt, (§. 60); es sei ferner der Halbkreis mDn bestimmt (§. 64); so sind m und n die beiden gesuchten Punkte.

Beweis. Da die Punkte A, m und L in gleicher Entfernung von den Punkten P und Q stehen, so werden sie in einerlei geraden Linie liegen (§. 13). Aber mA enthält auch den Punkt n, Endpunkt des Durchmessers mn (15. B. 4): folglich u. s. w.

Aufgabe.

§. 112. Sind von einer geraden Linie zwei Punkte A, B (Fig. 49 u. 50) und zwei Punkte C,

D von einer andern geraden Linie gegeben, einen Punkt S zu finden, in welchem sie sich treffen.

Auflösung.

Aus zwei Punkten einer der beiden geraden Linien, z. B.: aus den Punkten A und B als Mittelpunkte, mit den respectiven Entfernungen AC, AD dieser Punkte, und mit BC, BD der beiden Punkte C, D von der andern geraden Linie, als Halbmesser, seien vier Bogen beschrieben, von welcher sich zwei in C und c, und die beiden andern in D und d schneiden.

Es sei der vierte P. δ des Prllgrms. CDdδ gefunden, indem man

Cδ = Dd und dδ = DC (§. 11) macht.

Auch sei die vierte Proportionale zu den drei L. cδ, CD und Cc gefunden.

Mit dieser Entfernung, als Halbmesser und aus dem Mittelpunkt C und c, seien zwei sich in S schneidende Bogen beschrieben; so ist S der Durchschnittspunkt der beiden geraden Linien AB, CD.

Beweis. Die geraden Linien AB, Cc sind, so wie AS, Cc winkelrecht auf einander (§. 13, 14); folglich wird der Punkt S in derselben Linie AB sein; ferner ist AB oder AS auch perpendikular auf Dd (§. 13, 14), daher die Linie Dd parallel mit Cc,

(29. Buch 1). Aber wegen der respectiven Gleichheit der Seiten in den beiden Tr. dCδ, dCD, hat man Winkel dDδ = CdD (8. B. 1).

Folglich sind auch die beiden Linien Cδ, Dd parallel (28. B. 1.): also sind die Punkte c, C, δ in einerlei geraden Linie. Wegen der Gleichheit der zwei Seiten in den beiden Triangeln CBA, cBA, sind auch die Winkel CBA, cBA gleich (S. 8. B. 1.); aus gleichen Gründen findet man auch, daß die Winkel ABD, ABd in den Triangeln ABD, und ABd gleich sind; folglich ist W. cBd in der 49sten Figur, welcher die Summe der beiden W. cBA und ABd ausmacht, gleich dem Wink. CBD, der Summe der beiden W. CBA, ABD. Auch ist in der 50sten Figur, Winkel cBd, welcher die Differenz der beiden Winkel ABd, cBA ist, gleich Winkel CBD, welcher die Differenz der beiden Winkel ABD und CBA ist: folglich wäre für beide Figuren in den Triangeln cBd, CBD, welche zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben, die dritte Seite cd gleich der dritten Seite CD (4. B. 1).

Aber es ist CD = dδ: also Tr. cdδ gleichschenkl.; da überdem der Tr. cCS auch gleichschenkl. ist, so hat man folgende Proportion:

cδ : CD oder dδ = Cc : CS;

woraus wiederum:

$$cd : cd = cC : cS.$$

Folglich haben die beiden Tr. cdd u. cCS unter sich gleiche Winkel (5. B. 6); woraus: da W. cdd = W. cCS, folgt, daß CS prll. dd (29. B. 1). Es ist aber auch CD parallel dd; mithin wird der P. S in dieser Linie sein: folglich u. s. w.

Achtes Buch.

Von der Construktion, Vervielfältigung und Theilung der Winkel, und von den trigonometrischen Linien.

§. 113. Bemerk. Wenn wir sagen: einen W. abc (Fig. 51) mit dem Zirkel zu construiren, so verstehen wir darunter: mit dem Zirkel drei Punkte a, b, c zu finden, oder, wenn einer dieser P. gegeben ist, die andern zu finden, so daß, wenn man alsdann durch zwei von diesen P. a, b, eine gerade Linie, und durch einen dieser zwei P. b, und den dritten c, eine andere gerade L. zieht, man einen Winkel abc von verlangter Größe erhält.

Obgleich der W. abc nicht wirklich constr. ist, indem die geraden ab, bc noch nicht gezogen sind, was mit dem Zirkel allein nicht geschehen kann, so

werden wir doch die erstere Redensart beibehalten, und daran den Sinn knüpfen, über welchen wir übereingekommen.

Aufgabe.

§. 114. Wenn ein Winkel ABC durch drei Punkte A, B, C, und überdem noch zwei andere Punkte b und a gegeben, einen Punkt c zu finden, so daß Winkel abc gleich sei Winkel ABC.

Auflösung.

Suchet eine vierte Proportionale (§. 93) zu den drei Entfernungen AB, ab, BC: mit dieser Linie als Halbmesser beschr. aus b einen Bog., welcher durch c geht; suchet eben so eine vierte Proport. zu den drei Entfern. AB, ab, AC, und mit dieser als Halbm., beschr. aus a einen andern Bog., welcher den ersten in c trifft, so ist der W. abc = ABC.

Beweis. Weil in den beiden Tr. ABC, abc die Seiten proportional sind, so sind die den proportionalen Seiten gegenüberstehenden Winkel gleich. (5. B. 6.)

§. 115. Die Aufl. der vorstehenden Aufgabe (§. 114) wird also auch dazu dienen die folgende Aufg. zu lösen: Wenn drei Punkte A, B, C (Fig. 51), welche die Winkelspitzen eines Tr.

bilden, und zwei andere a und b, als Winkelsp. eines andern Tr. gegeben sind, einen dritten P. c zu finden, so daß Tr. abc ähnlich dem Tr. ABC.

Aufgabe.

§. 116. **Einen gegebenen Winkel ABC zu verdoppeln, zu verdreifachen, vervierfachen, u. s. w., (§. 113).**

Auflösung.

Aus A (Fig. 52), mit den Seiten AB, AC als Halbm. beschr. zwei unbestimmte Bogen BDF, CE.

Machet CD = CB, so ist der Winkel BAD = 2W. BAC.

Machet DE = CD, so ist W. BAE = 3W. BAC.

Machet EF = DE, so ist W. BAF = 4W. BAC. u. s. w.

Um den gegebenen W. zu vervierfachen, könnte man auch DF = BD machen.

Beweis. Die Tr. BAC, CAD, DAE, EAF haben respective gl. Seiten; daher sind die W. BAC, CAD, DAE, EAF u. s. w. gleich (8. B. 1). Folgl. u. s. w. Da nun W. BAD = DAF, so ist auch BD = DF (4. B. 1).

Aufgabe.

§. 117. Zu erkennen, ob der durch drei Punkte B, A, G gegebene Winkel gleich ist $\frac{1}{2}$ rechten Winkel.

Auflösung.

Mit dem Halbm. AB (Fig. 53), aus A beschr. den Halbkr. BFE (§. 64); machet GF=GB (§. 10). Wenn nun BF = FE, so ist W. BAG = $\frac{1}{2}$R; ist BF kleiner oder größer als FE; so ist W. BAG kleiner oder größer als $\frac{1}{2}$R.

Beweis. Weil W. BAF 2 W. BAG (§. 116); und wenn W. BAG gleich $\frac{1}{2}$R, so wird W. BAF ein rechter W. sein, und folgl. BF = FE (§. 83).

Wenn aber BAG kleiner oder größer als $\frac{1}{2}$R. ist, so wird auch BAF kleiner oder größer als $\frac{1}{2}$R. sein. folgl. BF kleiner oder größer als FE (24. B. 1).

Aufgabe.

§. 118. Den bloß durch die drei Punkte A, B, C gegebenen Winkel BAC in zwei gleiche Theile zu theilen, wobei angenommen, daß A von B und C nicht gleichweit entfernt ist.

Auflösung.

Aus A (Fig. 54), mit AB beschr. man den Bg.

BMD; mache CD = CB; halbire die Bg. BMD u. BAN in M und N (§. 60); so ist der W. BAN $\frac{1}{2}$ W. BAC.

Beweis. Ist W. BAD das Zwiefache von BAC (§. 116), und auch das Doppelte von BAM (33. B. 6), so haben wir W. BAC = BAM; aber der W. BAN ist die Hälfte von BAM; folglich ist auch BAN die Hälfte von BAC.

Aufgabe.

§. 119. Wenn der aus A beschriebene Bogen BC gegeben ist (Fig. 55), den Sinus, Cosinus, die Tangente und Secante dieses Bogens zu finden.

Auflösung.

In der mit AB beschr. Prph. machet Bc=BC; theilet die Sehne Cc im P. M (§. 66) in zwei gl. Theile, so ist CM der Sinus und MA der Cosinus des gegebenen Bog.

Aus M, als Mittelp., mit dem Halbm. MA beschr. einen Bog., der, wenn es möglich ist, die Periph. in D u. d schneidet; bestimmt den Halbkr. dDd (§. 64); verlängert BA von B nach V, indem man BV=BA macht; aus A und V, mit Dd beschr. zwei Bogen, welche sich in S schneiden, so ist BS die Tangente, SA die Secante.

Beweis. Die Linie BA halbirt die Sehne Cc

in M unter rechten W. (§. 14); folgl. ist CM der Sinus und CA der Cosinus des Bogens BC.

SB ist perpendik. auf AB (§. 83); Dd ist die dritte Proportionale zu den beiden Linien, AM, AC (§. 87); dieß wird auch mit AS der Fall sein, welche = Dd. Folglich hat man in den beiden rechtw. Tr. AMC, ABS die Proport.:

$$AM : AC = AB : AS,$$

und durch Umkehrung (4. B. 5.)

$$AC : AM = AS : AB.$$

Daher (nach 35. B. 5.):

$$AC^2 : AM^2 = AS^2 : AB^2;$$

und wenn man für AC^2 u. AS^2 ihre aus dem 47sten Satze des 1sten Buchs gezogenen Werthe setzt, so ist:

$$AM^2 + MC^2 : AM^2 = AB^2 + BS^2 : AB^2.$$

Daher (nach 17. B. 5.):

$$MC^2 : AM^2 = BS^2 : AB^2; \text{ u. (34. B. 5.).}$$

$$MC : AM = BS : AB:$$

folgl. sind auch die Seiten MC, BS proportionirt; demnach W. MCA = BSA (5. B. 6.): also sind die P. A, C, S in einerlei gr. L., und BS wird die Tangente, so wie AS die Secante des Bog. BC sein.

Wenn der Kreis, der aus dem Mittelp. M mit dem Halbm. MA beschrieben ist, die Periph. nicht schneidet, oder schnitte sie unter zu spitzen Wink., so muß man zu den (in §. 89 oder 90 u. 91) angegebenen Mitteln seine Zuflucht nehmen.

Andere Auflösung, die Tangente und Secante zu finden.

Beschreibt (§. 64) den Halbkreis BCE (Fig. 56); mit dem Halbmesser BC, aus dem Mittelpunkt E, schneidet ihn in Q; mit CQ, aus A und B, beschreibet zwei unbestimmte Bogen, welche sich in V schneiden; mit demselben Halbmesser CQ, aus V, schneidet die Prph. in e; mit Ee aus A u. B, beschr. zwei Bog., welche sich in m schneiden; mit demselben Halbmesser Ee, aus m, beschreibt den Halbkr. ABS (§. 64), so wird SB die Tangente und SA die Secante des Bog. BC sein.

Beweis. Wenn der Bog. BCF gleich ist dem vierten Theil der Peripherie = FE: und nach der Construktion

$$BC = QE,$$

so wird auch $CF = FQ$ sein.

Ueberdem weiß man aus den trigonometrischen Definitionen, daß der Sinus des Bogens CF einerlei mit dem Cosinus des Bogens BC, und daß die Sehne des Bog. CFQ das Zwiefache des Bog. CF, das Doppelte des Sinus vom Bogen CF oder des Cosinus vom Bogen BC ist.

Diese Sehne ist gleich $CQ = AV$. Man hat ferner

$$AV \cdot Ee = AB^2;$$

und da AmS (§. 64) eine gerade L. $= 2Ee$, und

$$aV = \cos. BC \text{ ist;}$$

so ist:

$$2Ee \cdot \cos. BC = AB^2 = AS \cdot \cos. BC;$$

folglich (17. B. 6.):

$$\cos. BC : AB = AB : AS;$$

demnach wird AS die dritte Proportionale zum Cosinus und Halbmesser, folgl. nach den trigonometrischen Beweisen gleich der Secante sein. Ferner, da W. ABS $=$ Q (31. B. 3), so ist die Secante AS der Lage nach bestimmt, und folglich BS die Tangente.

Aufgabe.

§. 120. Wenn der Sinus mn eines Bogens, nebst dessen Halbmesser AB gegeben, diesen Bogen zu finden.

Auflösung.

Beschreibt (Fig. 57) mit dem Halbmesser AB, den Kreis CcK; verdoppelt mn (§. 64): mit einem Halbmesser $=$ 2 mn, und von irgend einem Punkte C der Peripherie beschreibt einen Bogen, welcher sie in c schneidet: halbirt den Bogen Cc in B (§. 60); so ist BC der gesuchte Bogen.

Beweis. Der Sinus des Bogens BC, ist nach den trigonometr. Definitionen die Hälfte von der doppelten Sehne des Bogens BC; folglich u. s. w.

Aufgabe.

§. 121. Wenn der Cosinus ma eines Bogens, nebst dessen Halbmesser AB gegeben, diesen Bogen zu finden.

Auflösung.

Beschreibt den Kreis CcK (Fig. 57) mit dem Halbmesser AB, verdoppelt ma (§. 64): aus einem beliebigen Punkte c der Peripherie als Mittelpunkt, mit einem Halbmesser = 2ma, schneidet die Peripherie in K; begrenzt den Halbkreis KcC (§. 64); halbirt den Bogen Cc in B (§. 60), so ist BC der gesuchte Bogen.

Beweis. Ziehet die andere Sehne Cc, so wird sie in M durch den Halbmesser AB rechtwinklig halbirt sein (§. 14). Aber der eingeschriebene und auf dem Durchmesser stehende Winkel CcK ist auch ein R. (31. B. 3.); also sind die beiden rechtwinkligen Triangel CMA, CcK, welche einen gemeinschaftlichen Winkel in C haben, einander ähnl. (32. B. 1): daher ist (4. B. 6.):

$$CM : Cc = MA : cK.$$

Aber CM ist die Hälfte von Cc; mithin:

$$MA = \frac{1}{2}cK = ma;$$

ferner, ist MA der Cosinus des Bogens BC, folglich u. s. w.

Aufgabe.

§. 122. Wenn die Tangente sb eines Bogens, nebst dessen Halbmesser AB (Fig. 55) gegeben, diesen Bogen zu finden.

Auflösung.

Beschreibet mit dem Halbmesser AB den Kreis BCd; in B errichtet auf AB einen Perpendikel AS = bs (§. 76); suchet den Punkt C (§. 111), wo SA die Peripherie schneidet: so ist BC der gefundene Bogen.

Diese Auflösung bedarf keines Beweises.

Aufgabe.

§. 123. Wenn (Fig. 55) die Secante sa eines Bogens, nebst dessen Halbmesser AB gegeben, diesen Bogen zu finden.

Auflösung.

Beschreibt mit dem Halbmesser AB die Peripherie BCd. Auf AB traget BV = AB (§. 64); ferner, aus den Mittelpunkten A und V, mit dem

Halbmesser sa, beschreibet zwei Bogen, die sich in S schneiden; sucht (§. 111) den Punkt C, wo die Linie SA die Peripherie schneidet, so ist BC der gesuchte Bogen.

Beweis. Die Linie SB ist perpendikular auf BA (§. 83), daher ist sie die Tangente des Bg. BC und folglich ist SA dessen Secante.

Neuntes Buch.

Von den ähnlichen Figuren und den regulären Polygonen.

§. 124. Bemerk. Wenn wir sagen: eine Figur oder ein Polygon zu construiren, so verstehen wir darunter: Alle die Punkte zu finden, welche hinreichen, um nach Größe und Lage alle zu ziehende geraden Linien zu bestimmen, welche zur vollständigen Constr. des Polygons erforderlich sind.

Aufgabe.

§. 125. Ueber einer gegebenen Seite ab einen Triangel zu zeichnen, der einem andern gegebenen Triangel ABC (Fig. 51) ähnlich ist.

Auflösung.

Siehe §. 115.

Auf-

Aufgabe.

§. 126, Es sei (Fig. 58) eine Figur ABCEFD gegeben, man soll eine Figur zeichnen, die jener ähnlich, und deren Fläche mit der der genannten Figur in einem gegebenen Verhältnisse steht.

Auflösung.

Die Fläche der neuen Fig. soll z. B. nur $\frac{2}{5}$ so groß sein, als die Fläche der gegebenen Fig.

Mit einem Halbm. AB, so groß als möglich, zeichnet die 43. Fig. (§. 100). Nehmet in dieser Fig. die Linie Aa $= V2$ als Halbm. Aus dem Mittelp. O (Fig. 58), beschreibet einen kleinern Kreis, in dessen Periph. v liegt. Mit der Linie ET $= V5$ (Fig. 43), als Halbm., und aus demselben Mittelp. O, beschreibt einen größern Kr., in dessen Periph. sich der P. V befindet, in Bezug auf den P. v so bestimmt, daß die Linie Vv im P. v des innern Kr., fast eine Tangente bildet.

Nehmt nun an, es sei die gegebene Fig. in Tr. ABC, ACD, CDE, EDF zerlegt, indem man sich die gr. L. AC, CD u. s. w. gezogen denkt, und schreibt die Nummern 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w. auf die Entf. AB, AC, CD u. s. w., welche die Seiten dieser Tr. messen; traget successive die Entf. 1, 2, 3, u. s. w. als Sehnen so vieler auf einander folgender

Bog. des Kr. V auf: nämlich: AB von V in 1, AC von 1 in 2, BC von 2 in 3, u. s. w. bis zu Ende. Dieses geschiehet, wenn man die Entf. AB als Halbmesser nimmt, und damit aus dem P. V, als Mittelp. einen Bogen beschreibt, welcher dieselbe Prph. im P. 1 schneidet, u. s. w.

Beschreibet mit einem Halbm. gl. Vv, und indem man succ. die P. 1, 2, 3, 4, u. s. w. als Mittelp. nimmt, Bogen die successive die kleinere Prph. in den P. 1, 2, 3, 4, u. s. w. bis am Ende, schneiden. Die Sehne des innern Kreises, oder die Entfernungen von v nach 1, von 1 nach 2, von 2 nach 3, von 3 nach 4, u. s. w. sind die Seiten ab, ac, bc, cd, u. s. w. der neuen Figur, die man Tr. für Tr. constr. Mit der Entf. des P. v von 1, bestimmt man die beiden P. a u. b; aus den Mittelp. a u. b, und mit der im innern Kr. genommenen zweiten und dritten Entf. (die 2te von 1 nach 2, und die 3te von 2 nach 3), beschreibet zwei Bogen, welche sich in c schneiden; aus den Mittelp. a, c, und mit der im innern Kr. genommenen vierten und fünften Entfern. (die 4te von 3 nach 4, und die 5te von 4 nach 5), beschreibet man zwei Bog., die sich in d schneiden. Eben so bestimmt man die P. e und f, wodurch alsdann die Fig. constr. ist.

Beweis. Die Sehnen des innern Kreises verhalten sich zu den homologen Sehnen des äußern Kr.,

wie der Halbm. Ov zum Halbm. OV (§. 93), oder wie $\sqrt{2}$ zu $\sqrt{5}$: es stehen also alle Seiten der Tr. in Fig. abcefd, und die homologen Seiten der Tr. in Figur ABCEFD in einerlei Verhältniß: mithin sind die Tr. beider Fig. unter einander gleichwinkl., und also ähnlich (5. B. 6. Def. 1.): daher sind die nämlichen Polygone einander ähnlich (20. B. 6), und da die Flächen sich wie die Qdrt. der homologen Seiten verhalten, so wird sich die Fläche des Polygons abcefd verhalten zu der des Polyg. ABCEFD wie 2 zu 5: folglich die Fläche der kleinern Fig. zur größern, wie 2 : 5. Nach diesem Beisp. ist es leicht, die zu befolgende Methode einzusehen, um die Aufg. aufzulösen, welches auch immer das aufgestellte Verhältniß zwischen der Fläche der zu constr. Fig. und der gegebenen Fig. sein mag.

Man beschreibet zwei Peripherien v u. V mit den Halbm., welche sich verhalten, wie die Wurzeln aus den Zahlen, die das Verhältniß der Flächen ausdrucken; auf diejenigen der beiden Peripherien, welche der gegebenen Fig. entsp., trage man successive als Sehnen die Seiten der Tr., in welche diese Figur angenommenermaaßen zerlegt ist. In der andern Prph. bestimmt man nach der oben vorgetragenen Methode proportionale Sehnen, welche alsdann die respectiven Seiten von den Tr. der neuen Fig. sind.

Da nun das Verhältniß der Hälften der Wurzeln gleich dem der ganzen Wurzel ist, so wird die Fig. 45 in vielen Fällen dienen (§. 104). Für die andern Fälle siehe §. 101, 102 und 103.

Man nehme nun einen Halbm. AB (Fig. 44 u. 45), so groß, als man bequem anwenden kann, damit die Kreise die Längen der aufzutragenden Sehnen besser aufnehmen können, und die daraus entstehenden Durchschnitte mehr rechtw. werden.

§. 127. Wenn das Verhältniß zweier Seiten AB und ab, oder irgend zweier anderen Seiten gegeben ist, so wählt man in diesem Verhältnisse die beiden größt möglichen Halbm. OV, Ov.

Aufgabe.

§. 128. **Mittelst des Lineals und des Zirkels in einem gegebenen Kreise irgend ein reguläres Polygon einzuschreiben.**

Auflösung.

Theilt die Peripherie in so viel gleiche Theile, als das Polygon, welches man einschr. will, Seiten hat (§. 27, 29, 30, 31, 32, 38, 41, 42, 53, 57, 60, 63), so sind die Theilungspunkte die Winkelsp. des gesuchten regulären Polygons, und die Sehnen der Bogen dessen Seiten.

Beweis. Da alle Seiten als Sehnen gleicher

Bogen gleich sind, so sind auch die Winkel, welche sie bilden, gleich, denn weil ihre Scheitel in der Periph. liegen, so stehen sie auf gleichen Bog. (21. B. 3). Man hat also in den Kreis ein reguläres Polygon von verlangter Seitenzahl beschr. (Def. 1. Buch 3).

§. 129. Weil man nur mit drei außerh. der Periph. angenommenen P., und höchstens mit sechs Zirkel-Oeffnungen (§. 59), dieselbe in 240 gleiche Theile (§. 57) theilen kann, so könnte man auch in dem Kr. mit diesen drei P. und diesen sechs Oeffnungen, so viele reguläre Polygone einschreiben, als es Zahlen giebt, die 240 genau theilen: diese Zahlen sind: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240; man würde also mit Auslassung der Theilungszahl 2, in den Kreis ein reguläres Polygon von 3, 4, 5, 6, 8, 10, u. s. w., und endlich von 240 Seiten einschr. können.

§. 130. Wenn es sich findet, daß die Zahl der Seiten des einzuschreibenden Polygons eine von denen ist, in welche man nach der gelehrten Methode (§. 27. 30 ꝛc.) die Periph. getheilt hat, z. B. die Zahl 12, so theilt man die Periph. in zwölf gleiche Theile (§. 31). Die beiden Endp. jeder dieser Theilungen werden die Winkelsp. des Polygons sein, welches man einschr. sollte, oder, welches dasselbe ist,

die Sehnen dieser Bogen werden die Seiten des Polygons sein.

Wenn die Zahl der Seiten des einzuschreibenden Polyg. sich nicht genau in den Aufg. des II. Buchs findet; z. B.: wenn man ein Polyg. von 60 Seiten einschreiben will, so muß man diese Zahl verdoppeln, verdreifachen, vervierfachen, u. s. w., bis man eine Zahl bekommt, die in den vorhergehenden Aufg. ausgedrückt ist; wenn man z. B. 60, die Seitenzahl des angezeigten Polygons, verdoppelt, so hat man 120. In §. 41 ist aber angegeben, die Prph. in 120 gl. Th. zu theilen. Diese Theile zwei und zwei genommen, bilden 60 gleiche Bogen, von denen die Sehnen Seiten des in Rede stehenden Polygons sind.

Muß man die Zahl verdreifachen, z. B.: wenn man ein Polygon von 16 Seiten in einen Kreis beschreiben wollte, so würde man alsdann, wie in der Aufg. (§. 38), die Prph. in $48 = 3 \cdot 16$ gl. Theile theilen, nimmt man nun 3 solche Bg., um einen zu bekommen, welcher der 16te Theil von der Peripherie ist, so ist jede Sehne dieser gleichen Bogen wieder eine Seite des Polygons von 16 Seiten.

Aufgabe.

§. 131. **Um einen gegebenen Kreis BCDd einen gleichseitigen Triangel (§. 124) zu beschreiben.** (Fig. 59.)

Auflösung.

Es sei BC = CD = dem Halbm. AB dieses Kreises, und

BL = DL = Dd = DN = dN = dM = BM = BD

gemacht. Die drei Punkte L, M, N werden die Winkelsp. des um den Kreis beschr. gleichseit. Tr. sein.

Beweis. Da der im Kreise beschriebene Tr. BDd (§. 29, 130) gleichseitig ist, so sind die Seiten der Tr. DLB, NDd, dBM gleich den Seiten jenes Tr.; folgl. sind ihre W. gleich (8. B. 1); die drei W. NDd, dDB, BDL sind also gleich den drei W. des eingeschr. Tr., d. h. = 2R (32. B. 1): die L. NDL ist also eine gerade Linie (14. B. 1.): dasselbe würde man auch von den beiden Linien LBM, NdM beweisen; und da eine jede von ihnen das Doppelte von der Seite BD ist, so werden sie auch unter sich gleich sein. Folglich ist der Tr. LMN gleichseitig; ferner sind die Winkel NDd, DLB gleich, daher ist die gr. Dd parallel zu LB (39. B. 1), oder zu LM. Es liegen aber die Punkte N, A, B in einem Perpend. auf Dd (§. 13, 14). Folgl. ist auch AB perpend. auf LM (27. B. 1): es ist also LM eine Tangente am Kreise (16. B. 3). Dasselbe wird man für die beiden Linien NL, NM beweisen: folglich ist der Tr. NLM gleichseitig und um den Kr. beschr. Def. 2. B. 4.)

Aufgabe.

§. 132. Um einen gegebenen Kreis ein Quadrat zu beschreiben. (Fig. 60.)

Auflösung.

Theilet die Peripherie dieses Kreises in vier gl. Theile, in den P. B, F, E, f (§. 27); aus diesen P., als Mittelp., mit dem Halbm. AB, beschreibet Bogen, welche sich in R, S, T, V schneiden, so sind diese letzten vier Punkte die Winkelsp. des um den Kreis beschr. Quadrats.

Beweis. Da die W. TBA, SBA rechte sind (§. 100), so ist TSB eine gerade Linie (14. B. 1.) perpend. auf den Durchm. BE, folgl. eine Tangente am Kr. (16. B. 3). Dasselbe beweist man auch für die andern L. TFV, VER, RfS. Da überdem, die Seiten der Tr. BFT, BFA respective gleich sind, so ist W. BTF = BAF (8. B. 1), und daher = R. (§. 27): dasselbe wird auch für die W. V, R, S bewiesen: folgl. u. s. w.

Aufgabe.

§. 133. Um einen gegebenen Kreis ein reguläres Fünfseit zu beschreiben.

Auflösung.

Es sei der Kreis BDE (Fig. 61), mit dem Halbmesser AB beschr. Theilet seine Periph. in fünf gl. Theile (§. 40) in den Punkten B, C, D, E, F; aus einem dieser P. C als Mittelp., und mit dem Halbm. CB beschreibet den Halbkr. BDP (§. 64); aus dem P. E, der dem Bogen CB gegenüber liegt, als Mittelp., mit dem Halbm. EC schneidet den Bog. BDP in p; aus den Mittelp. B, C, D, E, F, mit dem Halbm. Pp beschr. Bg., welche sich in den P. b, c, d, e, f schneiden; diese Durchschnittsp. sind die Winkelsp. des um den Kreis beschriebenen Fünfseits.

Der Beweis ist derselbe, wie in der folgenden Aufgabe.

Aufgabe.

§. 134. **Wenn die Winkelspitzen irgend eines im Kreise beschriebenen regulären Polygons gegeben, die Winkelspitzen eines ähnlichen umschriebenen Polygons zu finden.**

Auflösung.

Es seien die P. B, C, D, E (Fig. 62) die Winkelsp. des eingeschriebenen Polygons. Aus einem dieser P. C, als Mittelp., mit einem der Entf. CB gl. Halbm., beschr. den Halbkr. BDP (§. 64). Aus den

Mittelp. B, C, und mit dem Halbm. BD beschr. 2 Bogen, welche sich in V schneiden (in dem Falle der vorigen Aufg. (Fig. 61), fällt der P. V mit dem P. E zusammen): mit demselben Halbm. BD, und aus dem P. V als Mittelp., schneidet die Periph. BDP in p; mit Pp als Halbmesser aus B, C, D, E, u. s. w. (welche die Winkelsp. des eingeschriebenen Polygons sind), beschr. die Bogen, welche sich in b, c, d, e, u. s. w. schneiden; diese Punkte sind die Winkelspitzen des umschriebenen regulären Polygons.

Beweis. Es ist:

$$Pp \cdot VC = CD^2 \quad (\S.\ 22).$$

d. h., $cC \cdot BD = BC^2$;

also (17. B. 6.):

$$BD : BC = BC : Cc,$$

aber $AC = CD$,

und $Bc = cC$;

die Seiten der gleichsch. Tr. BCD, BcC sind also proportional; daher ist (5. B. 6):

$$W.\ cCB = W.\ CBD;$$

woraus folgt, daß die beiden Linien cC, BD parallel sind (28. B. 1.); eben so beweiset man, daß Cd auch parallel zu BD ist. Die P. c, C, d liegen also in einerlei geraden Linie: weil aber $BC = CD$, so folgt, daß der Halbm. AC perp. auf BD ist (§. 14); also ist er es auch auf cd (29. B. 1); mithin ist cd eine Tang. in ihrer Mitte C (16. B. 3); eben so beweist

man, daß de = cd eine Tangente in ihrer Mitte D ist; so verhält es sich auch mit den andern. Die Anzahl dieser Linien ist gleich die der P. B, C, D, E, u. s. w.; folgl. u. s. w. (Def. 2. B. 4).

Aufgabe.

§. 135. Ueber einer gegebenen Seite AC (Fig. 1) einen gleichseitigen Triangel zu zeichnen.

Auflösung.

Den P. D findet man nach der in (§. 1) gewiesenen Methode; der Triangel ADE ist der gesuchte Triangel.

Aufgabe.

§. 136. Ueber einer gegebenen Seite AB (Fig. 43) ein Quadrat zu zeichnen.

Auflösung.

Wenn die beiden Punkte F u. T nach der in (§. 100) vorgeschr. Methode gefunden, so ist das Quadrat ABTF das gesuchte Quadrat.

Beweis. Es ist BT gleich und parallel zu FA; und folglich perpendik. auf AB (§. 100), die Linie FT ist also auch parallel zu BA (33. B. 1); daher

sind auch die W. BTF, AFT rechte Winkel (27. B. 1); folglich ABTF ein Quadrat (Def. 32. B. 1).

Aufgabe.

§. 137. Ueber einer gegebenen Seite AB (Fig. 63) ein reguläres Fünfseit zu zeichnen.

Auflösung.

Mit dem Halbm. AB, aus dem Mittelp. A, beschreibet die Periph BCDEd, macht

$$BC = CD = DE = Ed = AB;$$

macht ferner $Ba = Ea = BD$,

und dann: $Db = db = Aa$;

aus B, mit dem Halbm. BA, beschreibet den unbestimmten Bogen ACL, in welchem man

$$AH = HK = KL = Ab$$

macht: eben so mache man in der Prph. BCD,

$$BQ = QP = PN = Ab.$$

Aus den P. L und N, als Mittelpunkte, mit dem Halbm. AB beschr. zwei Bogen, welche sich in M schneiden, so sind A, B, L, M, N die Winkelsp. des gesuchten regulären Fünfseits.

Beweis. Der W. CBF (Fig. 61) des regulären Fünfseit BCDEF hat den halben Bog. CDEF zum Maße (20. B. 3). Da nun dieser Winkel gl. ist drei Fünftel der Periph., so hat der W. CBF des

Fünfseits drei Zehntel von der Periph. zum Maße. Aber jeder von den Bogen AHKL, BQPN, (welche die W. ABL, BAN messen); ist gleich drei Zehntel der Periph. (§. 42); folgl. sind diese W. ABL, BAN die W. des über AB zu constr. regulären Fünfseits; nun sind die 3 Seit. AB, BL, AN als Seiten des Fünfs. einander gleich; vergleicht man nun die P. L, B, A, N der 63. Fig., mit den Punkten C, B, F, E der 61. Fig., so ergiebt sich, daß, da die Seiten des Tr. LMN der ersten Fig., respective gleich den Seiten des Tr. CDE der andern Fig. sind, sie auch gleiche W. haben (8. B. 1), und alles sich vollkommen deckt: folgl. u. s. w.

Auflösung II.

Beschr. wie oben, mit dem Halbm. AB, aus dem Mittelp. A, die Peripherie BDd (Fig. 64); machet in derselben

BC = CD = DE = Ed = AB,

Ba = Ea = BD;

u. endl. Db = db = Aa;

ferner, beschreibet mit dem Halbm. bE, aus A, einen Bogen, welcher durch L und M geht; aus B, mit dems. Halbm. bE, schneidet diesen Bog. in M und die Periph. in N; endlich schneidet mit dems. Halbm., aus N den Bog. LM in L, so sind die P. A, B, L, M, N die Winkelsp. des regul. Fünfseits.

Beweis. Es ist (4. B. 2):

$$BE^2 = bE^2 + Bb^2 + 2Bb : bE.$$

Der eingeschriebene W. BNE stehet auf dem Durchm. daher (31. B. 3., 47. B. 1):

$$BE^2 = BN^2 + NE^2.$$

Vergleicht man nun die beiden Werthe von BE^2, in welchen

$$bE^2 = BN^2;$$

so folgt, daß:

$$Bb^2 + 2Bb \cdot bE = NE^2:$$

Da ferner bE gl. $bA + AE = Ab + AB$,

so ist:

$$Bb^2 + 2Bb \cdot Ab + 2Bb \cdot AB = NE^2;$$

aber $2Bb \cdot AB = 2Ab^2$ (§. 46),

daher;

$$Bb^2 + 2Bb \cdot Ab + Ab^2 + Ab^2 = NE^2:$$

aber:

$$Bb^2 + 2Bb \cdot Ab + Ab^2 = AB^2,$$

also: $AB^2 + Ab^2 = NE^2$.

NE ist daher die Seite des in den Kreis BDd (§. 50) beschriebenen Fünfseits (10. B. 13),

Der Bogen NE ist also gleich zwei Zehntel der Peripherie, daher ist der Bogen BCN gleich drei Zehntel, und W. BAN ein W. des regulären Fünfseits. Substituirt man nun BN für die beiden Seiten BA, AN des regulären Fünfseits, so wird sie die Seite des gleichschenkl. Tr., welcher zur Grundl.

AB hat, und jeder der W. an der Grundl. ist doppelt so groß, als der W. am Scheitel (11. B. 4); die Punkte L und M sind also auch die Winkelsp. des zu constr. regulären Fünfseits.

Aufgabe.

§. 138. Ueber einer gegebenen Seite AB ein reguläres Sechsseit zu construiren. (Fig. 65.)

Auflösung.

Mit einem Halbm. AB, aus A, B als Mittelpunkte beschr. zwei Bogen, welche sich in O schneiden; mit dems. Halbm., aus dem Mittelp. O, sei ein Kreis beschr., in dessen Peripherie man

$$BC = CD = DE = EF = AB$$

macht; so ist ABCDEF das verlangte Sechsseit.

Siehe wegen des Beweises den 15ten Satz des 4ten Buchs.

Aufgabe.

§. 139. Ueber einer gegebenen Seite AB (Fig. 66) ein reguläres Achtseit zu construiren.

Auflösung.

Aus den Punkten A und B, als Mittelp., mit dem Halbm. AB, beschreibt die beiden Halbkr. BCDE, ACdc (§. 64); machet

Ea = Ba = Aα = eα = CE;

mit dem Halm. AB, aus a, schneidet den Bogen DE in H; mit demselben Halbm., aus α, schneidet den Bogen de in h; ferner mit dems. Halbm., aus H, h beschr. zwei Bogen, welche durch G, g gehen; mit dem Halbm. Ba, aus a, α, als Mittelp. schneidet diese beiden Bogen in g, G; mit dem Halbmesser AB, aus den Mittelp. G und g, werden zwei Bogen beschr., welche durch F, f gehen; schneidet diese beiden Bogen in f, F, mit dem Halbm. Aa, aus den Mittelp. a, α, dann werden die P. A, B, h, g, f, F, G, H die Winkelspitzen des regulären Achtseits sein, welches über AB zu constr. ist.

Beweis. Die Seiten AB, Bh, hg, gf, AH, HG, GF sind nach der Constr. alle einander gleich. Betrachtet man nun ein im Kreise beschr. reg. Achtseit, so wird man findet, daß jeder seiner W. an der Peripherie zur Grundl. einen Bg. hat, der gleich ist $\frac{6}{8}$ der Periph., und folgl. $\frac{3}{8}$ der Periph. zum Maße hat (20. B. 3.); man hat auch Bogen BCH = $\frac{3}{8}$ (§. 30); folgl. ist der W. BAH ein W. des Achtseits, so wie auch W. ABh; da nun aA, αB perp. auf AB sind (§. 27), so sind sie unter sich parall. (29. B. 1): folgl. wird die gerade Ha, welche einen W. von 45° mit aA macht (§. 27), noch ein ähnl. mit der Linie αB bilden (27. B.); aber hBα ist auch = 45°. Mithin aH prll. zu hB (28. B. 1): daher

ist

ist auch ah gleich und parallel zu HB (33. B. 1.); hieraus W. haH = hBH (34. B. 1); daher

W. hBH = hBE — HBE = hBE — $\frac{1}{2}$HAE (20. B. 3), er wird also zum Maße $\frac{3}{8} - \frac{1}{16}$, d. h., $\frac{5}{16}$ der Periph. haben: folgl. wird der W. Bha, welcher mit W. haH gleich 2R. ist (27. B. 1); zum Maß $\frac{3}{16}$ der Periph. haben. Ferner sind in den beiden Tr. ahB, ahg alle Seiten unter einander gleich, also W. ahg = ahB (8. B. 1); daher der ganze W. ghB zum Maße $\frac{3}{8}$ der Periph. hat, u. ist ein W. des Achtseits, wie W. AHG. Der W. hga wird noch gleich sein dem W. hBa, und da nun die beiden Tr. gfa, BAa auch unter einander gleiche Seiten haben, so wird auch W. fga = ABa sein. (Satz 8. Buch 1).

Der W. hgf wird also aus zwei W. zusammengesetzt sein, die respective gleich den zwei W. sind, welche den W. hBA bilden: diese beiden W. werden also gleich, und folgl. jeder von ihnen ein W. des Achtseits sein: dasselbe ist der Fall mit W. HGF; die Punkte f u. F sind daher auch wie alle andere Winkelsp. des Achtseits.

Auflösung II.

Mit dem Halbm. AB, aus A u. B, als Mittelp., beschreibet, wie oben, die beiden Halbkr. BCDE, ACde; und wenn man

Ea = Ba = Aα = eα = CE

gemacht hat, so beschr. mit AB, aus a, einen Bog., welcher den Bogen DE in H schneidet, und durch F geht; mit demselben Halbm., und aus α, beschr. noch einen Bogen, welcher den Bogen de in h schneidet, und durch f geht; mit dem Halbm. aA, aus a, ziehe einen Bogen, welcher durch f geht; mit demselben Halbm., aus dem Mittelpunkt α, beschreibt einen Bog., welcher durch F geht; endlich, mit dem Halbm. AB und aus den Mittelp. H u. F, h u. f, beschr. Bogen, welche sich in der G u. g schneiden.

Beweis. Nach dem Beweise der ersten Aufl., sind AB, aα unter sich parallel u. gl., eben so auch aA, αB, mit welchen sie rechte W. bilden, macht man, um abzukürzen, AB = 1; so ist auch:

aα = αf = aF = 1:

demnach ist: $Aa^2 = 2 = af^2 = aF^2$:

mithin sind die W. faa, Faα R. (48. B. 1), u. die P. f, α, B in ders. gr. L. (14. B. 1), wie auch die P. F, a, A, in einerlei Prll.: aus der Gleich. von fα, Fa folgt, daß fF auch gl. und prll. zu αa = 1; und Faαf also ein Qdrt. ist. Ferner, haben die Tr. FGa, HGa unter sich gl. Seiten, daher auch gl. W. (8. B. 1.), und W. FGa ist gleich GaH; die beiden Linien GH, Fa sind daher parallel, wie auch FG, aH (33. B. 1.): aber der äußere W. FaH des Tr. aHA ist gleich den beiden innern ihm entgegengesetzten aHA, aAH (32

B. 1.), d. h., gleich drei halben R., folgl. W. FaH = BAH: da nun die Gegenwinkel der Prllgrm., gl. sind (34. B. 1), so ist auch

FGH = BAH. Demnach ist

W. AaH = aHG:

ferner ist W. AHa ein R.; folgl. ist auch

W. AHG = $\frac{2}{3}$R.:

gleichfalls, weil

W. fFa = R.,

und W. AFG = aHG,

welcher $\frac{1}{2}$R. ist, so ist der W. fFG auch gl. $\frac{2}{3}$R. Dasselbe beweist man für die Winkel in f, g u. h; folgl. sind alle Seiten und W. gleich, und die Figur ein reguläres Achtseit.

Wenn man die beiden Seiten der Gleichung vervierfacht (§. 15):

$$QM^2 = AQ^2 - AM^2,$$

welche zur dritten Fig. gehört; so ist:

$$4QM^2 = 4AQ^2 - 4AM^2;$$

d. h.: $Qq^2 = 4AQ^2 - AB^2$;

woraus sich für jeden Rhombus der folgende Lehrsatz ergiebt:

Das Quadrat einer der Diagonalen des Rhombus ist gleich viermal dem Quadrate einer seiner Seiten, weniger dem Quadrate der andern Diagonale.

Also in dem Rhombus FaHG, hat man:

$$aG^2 = 4Fa^2 - FH^2.$$

Da aber W. FGH = W. HAB,

und die beiden Seiten, welche diese beiden gleichen W. einschl., auch gleich sind, so ist auch:

$$FH = BH \text{ (4. B. 1.)}.$$

Folglich $aG^2 = 4AB^2 - BH^2 = BE^2 - BH^2$:

aber nach (31. B. 3 u. 47. B. 1):

$$BE^2 = BH^2 + HE^2;$$

folgl. $aG^2 = HE^2$;

daher $aG = HE$.

Auflösung III.

Nachdem man aus dem Mittelp. A, mit dem Halbm. AB (Fig. 67), den Halbkr. BCDE (§. 64) beschrieben, und Ba = Ea = BD gemacht hat; so beschr. man aus dem Mittelp. a und mit dem Halbmesser AB einen Bogen, welcher den Bogen DE in H schneidet, und durch F geht; aus dem Mittelp. a, mit dem Halbm. aA sei ein Bog. beschr., der durch f geht; aus dem Mittelp. a, mit dem Halbm. aB sei ein Bog. beschr., welcher durch g geht: aus a mit BH ein Bogen, der durch h; aus a mit HE ein Bogen, der durch G geht; mache

Bh = hg = gf = fF = FG = AB;

dann wird FG = GH sein, u. s. w.

Beweis. Die Tr. aAB, aBh, ahg, agf u. s. w., deren Scheitel in a, und deren Grundl. die Seiten der Fig. sind, haben mit den Tr., die in der 66sten Fig. mit denselben Buchst. bezeichnet sind (siehe die beiden vorhergehenden Beweise): respective gleiche Seiten; folgl. sind auch ihre W. gl. (8. B. 1); und da sie ähnl. geordn. sind, so sind die W. der 67. Fig., welche aus den W. dieser Tr., je zwei und zwei genommen, zusammen gesetzt sind, auch gl. den W. der andern Fig.; folgl. u. s. w.

Auflösung IV.

Nachdem man, aus dem Mittelpunkt A, mit dem Halbm. AB den Halbkr. BCDE beschr. hat, mache man darin

$$BC = CD = DE = AB,$$

und $Ba = Ea = BD$;

schneide aus a, mit AB den Halbkr. in H, beschr. dann aus E und A, mit dem Halbm. EH, zwei Bg., welche sich in P schneiden; aus P, mit PA, werde der Halbkr. in Q geschn.; aus den Mittelp. B, H, mit dem Halbm. BQ, seien zwei Bog. beschrieben, welche sich in O schneiden: aus dem Mittelpunkt O, mit demselben Halbm. OH, beschr. jetzt einen andern Kreis, welcher durch A geht; man mache in seiner Peripherie:

Bh = hg = gf = fF = FG = AB;

so sind die P. A, B, h, g, f u. s. w. die Winkelsp. des Achtseits.

Beweis. Da QP = AP = EP,

so wie QA = AE = AB,

und AB auf die Verlängerung von AE liegt (S. 15. B. 6), so ist (§. 22):

$$BQ \cdot AP = AQ^2:$$

hieraus (17. B. 6):

$$AP : AQ = AQ : BQ,$$

oder auch: HE : AE = AB : BO.

Aber HE ist eine Seite des Achtseits, das in den Kreis beschrieben; dessen Halbm. AE ist: folgl. wird auch AB die Seite des Achtseits sein, das im Kreise beschr. dessen Halbm. BO ist.

Aufgabe.

§. 140. Ueber einer gegebenen Seite AB (Fig. 69) ein reguläres Zehnseit zu construiren.

Auflösung.

Aus dem Mittelp. A, mit dem Halbm. AB, sei der Kreis BDd beschrieben. In seiner Peripherie nimm

BC = CD = DE = Ed = AB;

ferner: Ba = Ea = BD;

endl. Db = db = Aa.

Nun beschr. aus den Mittelp. A, B, mit dem Halbmesser bE, zwei Bogen, die sich in V schneiden; aus dem Mittelpunkt V, und mit demselben Halbmesser bE sei ein Kreis BLMNOPQRSA beschrieben, und

$$BL = LM = MN = NO = OP = PQ = QR = RS = AB$$

gemacht; so ist der Punkt S der Durchschnittspunkt der beiden Peripherien, und die Punkte A, B, L, M u. s. w., die zehen Winkelspitzen des gesuchten regulären Zehnseits.

Beweis. Die Linie bE ist eine Seite des gleichschenkligen Triangels, dessen Grundlinie AB und jeder Winkel an der Grundlinie doppelt so groß ist, als der an der Spitze (§. 137). Folglich ist in dem Tr. VAB, der W. BVA gleich $\frac{2}{5}$ R. (32. B. 1). Der Bogen CA, der ihn mißt, ist gleich $\frac{1}{10}$ der Peripherie, eben so wie die andern Bogen BL, LM, MN: folgl. ist das Polygon ABLMNOPQRS ein regul. Zehnseit, welches über die Seite AB in den Kr. beschr., dessen Mittelp. V ist.

Aufgabe.

§. 141. Ueber einer gegebenen Seite AB (Fig. 69) irgend ein reguläres Polygon von jenen, die man in den Kreis beschreiben kann (§. 128) zu construiren.

Auflösung.

Mit dem Halbmesser AB, sei ein Kreis BDd beschrieben; in diesem Kr. beschreibet man ein reguläres Polygon, was demjenigen ähnlich, welches man über der Seite AB construiren will, d, h. von einer gleichen Anzahl Seiten (§. 128) ist, und BC sei eine Seite dieses eingeschriebenen Polygons; man suche nun eine dritte Proportionale zu dieser Seite Bl und dem Halbm. AB (§. 87, 89, 90, 91, 92); mit dieser Linie als Halbmesser, aus den Mittelpunkten A, B beschreibe zwei Bogen, welche sich in V schneiden; aus dem Punkte V, als Mittelp., mit demselben Halbmesser VA, beschreibe einen Kreis ABLMN u. s. w.: und mache

$$BL = LM = MN = AB, \text{ u. s. w.}$$

so sind die P. A, B, L, M, N u. s. w. die Winkelsp. des gesuchten Polygons.

Beweis. Da die Seiten des Triangels BAl denen des Triangels BVA proport. sind, so ist

$$W. BAl = BVA,$$

(5. B. 6.): folgl. werden die Bog. Bl, BA, welche sie messen, gl. Theile von ihren Periph. sein; folgl. u. s. w.

Aufgabe.

§. 142. Ueber einer gegebenen Diagonale AB (Fig. 70) ein Quadrat zu construiren.

Auflösung.

Aus dem Mittelpunkt A, mit dem Halbmesser AB, sei der Bog. BCDE beschrieben; aus dem Mittelpunkt B, mit demselben Halbmesser, der unbestimmte Bog. CP. Es sei

$$CD = DE = BC$$

gemacht; so wie auch

$$Ba = Ea = BD.$$

Nun schneide man aus dem Mittelpunkt E, mit dem Halbmesser Aa, den Bogen CP in P: aus den Mittelpunkten A, B, mit dem Halbmesser AP, beschreibe man zwei Bogen, die sich in L und M schneiden; so ist ALBM das gesuchte Quadrat.

Beweis. Wenn man zur Abkürzung $AB = 1$ setzt, so ist:

$$AP = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \text{ (§. 104)} = AL = BL;$$

daher $AL^2 = BL^2 = \frac{1}{2}$,

und $AL^2 + BL^2 = 1 = AB^2$.

Folglich ist Winkel BLA ein rechter Winkel (S. 48. Buch 1), u. von den beiden W. LBA, LAB, die unter sich gleich sind, ist jeder die Hälfte eines rechten

Winkels (5 und 32. Buch 1.). Eben so wird man bew., daß Winkel BAM ein Rechter, und daß die Winkel MBA, MAP, jeder die Hälfte eines Rechten ist: folglich sind die Winkel MBL, MAL rechte Winkel, und ALBM das gefundene Quadrat.

Zehntes Buch.

Von den Mittelpunkten.

Aufgabe.

§. 143. Den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises MAB (Fig. 71) zu finden.

Auflösung.

Man nehme einen beliebigen P. A in der Peripherie an, und beschreibe mit einem willkührlichen Halbm. AB, der kleiner als der Durchm. des gegebenen Kreises, aber größer als der vierte Theil des Durchm. ist, den Halbkr. BCDE, indem man

$$BC = CD = DE = AB \text{ macht;}$$

M sei nun der P., wo sie die Peripherie des gegebenen Kreises schneidet; aus den Mittelp. E und A, mit dem Halbm. EM, seien zwei Bogen beschrieben, welche sich in L schneiden; aus dem Mittelp. L und mit dem Halbm. LA, sei der Kreis BME in Q ge-

schnitten; aus den Mittelp. B, A mit BQ, beschr. 2 Bg. welche sich in O schneiden; so ist O der gesuchte P.

Beweis. Da BAE eine gerade Linie ist (15. B. 4), so ist der äußere W. LAB des Tr. ALE, den beiden innern ihm entgegengesetzten zusammen genommen gleich (32. B. 1). Die Triangel LAE, LAQ haben aber respective gleiche Seiten, daher sind auch die W., welche diesen Seiten gegenüberstehen, gleich (8. B. 1). Also

W. AEL = QAL,

und W. ALE = ALQ;

mithin W. LAR gleich den beiden W. QAL und QLA zusammengenommen; zieht man beiderseits den W. QAL ab, so bleibt

W. QAB = QLA.

Folglich ist die Summe der beiden W. LAQ, LQA des Tr. LAQ, gl. der Summe der beiden W. AQB, ABQ des Tr. ABQ (32. B. 1). Aber diese beiden Tr. LAQ, ABQ sind nach der Constr. gleichsch.; daher ist jeder ihrer W. an der Grundlinie gl. der halben Summe (5. B. 1), und folgl. in beiden Tr. einander gleich. Die Tr. LAQ, ABQ sind demnach ähnl. (4. B. 6), und es ist;

LA : AQ = AQ : QB;

und substituirt man dafür die gleichen Werthe, so ist

ME : EA = AB : OB;

folgl. sind die gleichsch. Tr. MAE, AOB, deren Sei-

ten proportionirt sind, unter sich gleichwinkl. (S. 5. B. 6.); daher

W. OAB = AME = AEM.

Aber der äußere W. MAB ist gleich der Summe der beiden gleichen innern W. AME, AEM im Tr. AEM (32. B. 1): also ist er gleich dem W. OAB, zweimal genommen: oder es ist OAB = OAM. Es sind aber in den beiden Tr. OAB, OAM die Seiten AB, AM einander gleich, und überdem die Seite OA gemein, d. h., diese beiden Tr. haben einen gleichen W., der von zwei gl. Seiten eingeschl. wird: mithin ist auch (4. B. 1.) die dritte Seite OB von einem dieser Tr. gleich der dritten Seite OM des andern Tr.: es sind also die drei L. OB, OA, OM gleich, folgl. ist O der gesuchte Mittelp. des Kreises MAB (9. B. 3).

§. 144. Ist der Werth von QB, als dritte Proportionale, zu den beiden L. LA, AQ, oder zu den beiden L. EM, EA gefunden, welcher Werth dem Halbm. des Kr., dessen Mittelp. man sucht, gleich ist, so reicht es hin, zwei belieb. P. in der Prph. des Kr. anzunehmen, und aus diesen P., als Mittelp., mit demselben Halbm., zwei sich schneidende Bg. zu beschreiben; ihr Durchschnittsp. ist der Mittelpunkt des Kreises.

§. 145. Um weniger spitzwinklige Durchschnitte zu erhalten, wird es in der Praxis nützlich sein, nach

dem Augenmaße einen Halbm AB zu wählen, welcher dem Werth vom Halbm. des gesuchten Kreises nahe kommt.

Aufgabe.

§. 146. Um und in einem gegebenen gleichs. Triangel einen Kreis zu beschreiben (Fig. 72).

Auflösung.

Wenn A, B und M die Winkelsp. des gegebenen Tr. sind; so zeichne man aus dem Mittelp. A, mit dem Halbm. AM, den Bog. MDE, mache

$$MD = DE = AM;$$

aus den Mittelp. B, A, mit dem Halbm. BD beschr. zwei sich in L schneidende Bog.; aus L, mit dem Halbm. LA, beschreibe einen Bogen der den Bogen DE in Q schneidet; aus den beiden Winkelsp. des Tr., z. B., aus den P. A u. B, als Mittelp., u. mit dem Halbm. QE, seien zwei Bogen beschr., die sich in O schneiden; aus dem Mittelpunkt O mit dems. Halbm. OA, sei noch ein Kreis beschrieben: so ist dieser um den Tr. beschrieben.

Die Linie QE sei in m (§. 66) halbirt, aus demselben Mittelp. O, mit dem Halbm. Qm, sei ein anderer Kreis beschr., so ist dieser in dem Tr. beschrieben.

Beweis. Aus dem in §. 142 geführten Be-

weise folgt, daß da die Linie BAE eine gerade, die QE eine dritte Propt. zu den beiden L. EM, EA ist. QE ist daher der Halbm. eines Kr., welcher durch die drei P. M, A, B geht; und der P. O ist dessen Mittelp. (§. 143).

In der 59sten Fig., wo der Kreis DBd in den Tr. NLM eingeschr.: ist AD perpend. auf LD, und NAB auf LB (§. 131); mithin ist in den rechtw. Tr. NDA, NBL, die in N einen gemeinsch. W. haben, auch der dritte W. gleich (32. B. 1); daher die Proport. (4. B. 6.):

$$NL : LB = NA : DA.$$

Aber NL ist das Doppelte von LB; also auch NA das Dopp. von DA, d. h., der Halbm. des um den gleichseitigen Tr. beschr. Kr., ist das Zweifache von dem Halbm. des in den Tr. beschriebenen Kreises. folgl. u. s. w.

Aufgabe.

§. 147. Um und in einem gegebenen Quadrat einen Kreis zu beschreiben. (Fig. 73).

Auflösung.

Es seien A, B, T, F die Winkelsp. des gegebenen Quadrats. Man mache

$$AE = AB; \text{ und } FE = FB;$$

aus dem Mittelp. B, mit dem Halbm. BF, werde

ein Bog. beschrieben, welcher durch Q und q geht; aus dem Mittelp. E, mit dem Halbm. EA, werde dieser Bog. in Q u. q geschnitten. Aus dem Mittelp. Q, q, mit dems. Halbm. AE, beschr. zwei Bg. die sich in M schneiden; so wie aus A, B, mit AQ, zwei Bog., die sich in O schneiden. Aus dem Mittelp. O, mit dem Halbm. OB, beschr. man dann noch einen Kreis; dieser wird um das Quadrat beschr. sein. Beschreibt man nun aus dem Mittelp. O, und mit dem Halbm. OM, einen andern Kreis: so wird dieser in das Quadrat eingesch. sein.

Beweis. Wenn man, um abzukürzen:

$AB = 1$ macht, so ist:

$AQ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (§. 104) $= AO = BO$;

folgl. ist: $AQ^2 + BO^2 = 1 = AB^2$,

daher ist W. BOA ein R. (48. B. 1), und die W. OAB, OBA sind jeder gleich $\frac{1}{2}$R. (5. u. 32. B. 1). Da ferner W. BAF des Qdrt. ein R. ist, so wird W. OAF davon die Hälfte betragen; es ist also in in den beiden Tr. BAO, FAO, ein W. gl., der von zwei gl. Seiten eingeschl. wird; daher auch OB = OF (4. B. 1); auf dieselbe Weise beweist man auch, daß OB = OT. Folglich ist der Kreis ABTF um das Quadrat beschrieben.

Die L. OM ist perpend. auf MA (§. 83): folgl. ist BMA eine Tangente am Kr., der mit dem Halbm. OM beschr. ist. Dasselbe beweist man auch für die andern

dern Seiten AF, FT, TB; folgl. ist der aus dem Mittelp. O mit dem Halbm. OM beschr. Kreis in das Quadrat beschrieben.

Aufgabe.

§. 148. **Um und in ein beliebiges reguläres Polygon einen Kreis zu beschreiben (Fig. 74).**

Auflösung.

Wenn B, A, M die drei Winkelsp. dieses regulären Polygons, von welchen der mittelste A von den beiden andern B, M gleich weit entfernt ist; aus dem P. A, als Mittelpunkt, mit dem Halbm. AB, sei der Halbkr. BCDE (§. 64); und aus den Mittelp. A, E, mit dem Halbm. ME zwei Bogen beschr., welche sich in L schneiden; aus dem Mittelp. L, mit demf. Halbm. LA werde der Halbkr. BCDE in Q geschnitten: dann wird die L. BQ der Halbm. des um das Polygon beschr. Kr. sein; ferner, beschr. man z. B. aus den Winkelsp. B, A, als Mittelp., mit dem Halbm. BQ zwei Bogen, welche sich in O schneiden; so ist der P. O der Mittelp. des Kr.

Wenn AB eine Seite des Polygons ist, so theile man sie im Punkte T in zwei gleiche Th. (§. 66), OT ist dann der Halbm. des eingeschr. Kr., den man aus demf. Mittelp. O beschr.; wenn irgend eine andere L. Ab eine von den beiden Seiten des Polyg. ist, so

halbirt man sie in t, so ist Ot der Halbm. des einzuschr. Kreises mit dems. Mittelp. O.

Beweis. Aus dem Beweise in §. 14 geht hervor, daß O der Mittelp. des Kr. ist, welcher durch die drei P. B, A, M geht: daher ist er der Mittelp. des um das Pol. beschr. Kr., weil man durch die drei P. B, A, M, nicht mehr als einen Kr. legen kann (25. B. 3). Nachgehends ist OT perpd. auf TA (§. 83): daher wird TA eine Tang. am Kr. sein, welcher aus dem Mittelp. O mit dem Halbm. OT beschr. ist (16. B. 1). Ders. Beweis läßt sich auch auf alle andern der AB gl. Seiten anwenden; mithin ist der Kr. in das Pol. eingeschr., welches zur Seite AB hat; eben so beweist man, daß der aus dem Mittelp. O, u. mit dem Halbm. Ot beschr. Kr. in das Polyg. eingeschr. ist, welches Ab zur Seite hat.

§. 149. Wenn AB eine Seite des Pol. ist, in welches man den Kr. einschr. will, so giebt es mehrere Arten, diese Seite in 2 gl. Th. zu theilen (§. 66); wir haben die einfachste für das Qdt. angegeben (§. 147): für den Tr. allein (§. 146), ist der Halbm. des eingeschr. Kr. die Hälfte von dem Halbm. des umschr. Kr.; in dem Qdrt. allein ist er gl. der Hälfte der Seite.

Aufgabe.

§. 150. Den Mittelpunkt S eines Kreises

(Fig. 75) zu finden, welcher durch die drei gegebenen Punkte P, Q, R geht.

Auflösung.

Aus den P. P, Q als Mittelp., mit einem beliebigen Halbm., beschr. man zwei Bg. die sich in A u. B treffen, aus Q, R, mit einem belieb. Halbm., 2 Bog. die sich in C, D treffen; so ist der P. S wo sich die beiden L. AB, CD schneiden (§. 112), der gesuchte Mittelpunkt.

Beweis. Siehe (25. B. 3).

Eilftes Buch.

Verschiedene Aufgaben.

Aufgabe.

§. 151. Es ist ein Maßstab SL gegeben, man soll den Flächeninhalt des Triangels ABD, und des Vierseits ABCD finden (Fig. 76).

Auflösung.

Man mache Ba = BA, und Da = DA (§. 11); trage auf den Maßstab SL die mit dem Zirkel genommenen Weiten Aa, BD.

Gesetzt, man fände z. B. Aa = 7, BD = 8, so multiplicire man diese beiden Zahlen mit einander; nehme das Viertel des Produkts = 14; so drückt diese Zahl den Flächeninh. des Tr. ABD aus.

Um den Inhalt des Vierseits ABCD zu finden, muß man erst den P. a wie oben bestimmen, dann macht man Bc = BC und Dc = DC. Auf dem

Maßstabe findet man die beiden Entfern. Aa, Cc; es sei z. B. Aa = 7, Cc = 5; nehmt die Summe dieser beiden Größen = 12; multiplicirt mit dieser Summe = 12 den auf dem Maßstab gefundenen Werth von BD = 8, nehmt das Viertel des Produkts = 24; so drückt diese Zahl den Inhalt des Vierseits ABCD aus.

Beweis. Die Linie Aa ist das Doppelte des Prpd., welcher aus A auf BD fällt (§. 14); aber der Inhalt des Tr. ABD ist gleich der Hälfte vom Inhalte eines Prllgrms., welches BD zur Grundl., und diesen Perpend. zur Höhe hat (41. B. 1); er ist also gl. einem Viertel des Prod. von Aa mit BD; eben so ist der Inhalt des Tr. BCD gleich einem Viertel des Prod. aus Cc mit BD: folgl. ist der Inhalt des Vierseits ABCD gleich einem Viertel des Prod. aus der Summe der beiden Prll. Aa, Cc, mit ihrem Prpd. BD.

§. 152. Die vorhergehende Aufg. kann dazu dienen, den Inh. von einem durch ein beliebiges Polyg. eingeschl. Raum zu messen, wenn man sich das Polygon durch gerade Linien in so viel Triangel oder vierseitige Figuren getheilt denkt, als man es für angemessen hält; man würde auch noch andere Arten, es auf Trapeze zurückzuführen, vorschlagen können; man kann sie aber leicht aus der Methode, nach welcher man diese Aufg. gelöst hat, ableiten.

Aufgabe.

§. 153. Wenn die Triangelflächen, welche eine dreiseitige Pyramide bilden, gegeben sind; den Punkt, in welchem der aus der Spitze gefällte Perpendikel die Grundfläche trifft und die Höhe der Pyramide zu finden. (Fig. 77.)

Auflösung.

Es sei der Tr. ABC die Grundfl. dieser dreiseitigen Pyramide, und AEC, BCD, AFB die Triangelflächen, welche sich in der Spitze vereinigen. Aus dem Mittelp. C, mit dem Halbm. CD = CE, sei ein Bogen beschrieben, welcher durch die P. e und d geht; aus dem Mittelp. B, mit dem Halbm. BD, beschr. einen Bogen, welcher den ersten in d trifft; aus dem Mittelp. A, mit dem Halbm. AE, beschr. einen Bogen, welcher den zweiten in e schneidet; es sei der P. P gefunden, in welchem sich die beiden geraden Linien Dd, Ee (§. 112) schneiden; dieses ist alsdann der Fußpunkt des aus der Spitze der Pyramide gefällten Perpendikels.

Die Linie CE sei im P. m (§. 66) halbirt; aus dem Mittelp. m, mit dem Halbm. mE, sei der Halbkreis CpE beschrieben; es sei Cp = cP gemacht; so ist die L. Ep die Höhe der Pyramide.

Beweis. Wenn man in der Pyramide SABC

(Fig. 78), deren Grundfläche der Tr. ABC u. deren Spitze S ist, in dem Tr. SCB die Sδ perpd. auf CB fället, und in dem P. δ auf CB in der Ebene der Grundfl. ACB den Perpend. δd errichtet, so liegt in diesem Prpd. der Fußpunkt P des Prpd. SP (11. B. 11); aus der Spitze der Pyramide fälle man nun eben so aus S in der Ebene SAC auf AC den Perpend. Sε, und aus dem Punkte ε in der Ebene der Grundfl. ACB auf dieselbe L. AC den Perpend. εe: so liegt P auch in diesem Perpend.; folgl. ist dieser P. der Durchschnittsp. der beiden geraden Linien δd, εe. Aber in der 77sten Fig., wo die P. D, E den P. S der 78sten Fig. vorstellen, ist Dd perpend. in δ auf BC (§. 14); eben so ist auch Ee perpend. in ε auf AC: folglich ist P der gesuchte P.

Da außerdem die beiden Tr. CPS (Fig. 78), CpE (Fig. 77) rechtw. in P, p sind, der erste nach der Voraussetzung, und der zweite nach dem 31sten Satz im 3ten Buche; da CS dieselbe L. als CE, so ist CP = Cp; folgl. auch PS = pE; denn (Fig. 78) (47. B. 1):

$$(CS)^2 = (CP)^2 = PS^2;$$

auf gleiche Weise ist (Fig. 77):

$$CE^2 - Cp^2 = pE^2.$$

Aber $CS^2 - CP^2 = CE^2 - Cp^2$:

mithin $PS^2 = pE^2$; daher PS = pE;

folgl. pE die Höhe der Pyramide.

§. 154. Bis hierher waren alle Beweise, welche wir gegeben haben, auf Euklids Elemente gegründet. Da wir aber, ohne zu große Weitschweifigkeit nicht immer denselben Gang befolgen könnten, so werden wir einige Gleichungen gebrauchen, die man in jedem guten Lehrbuche der ebenen Trigonometrie erwiesen findet.

§. 155. Wenn, in einem, mit einem Halbm. $= 1$ beschriebenen Kreise x und y irgend zwei Bg. sind, so ist:

$$\sin.(x+y) = \sin. x \cos. y + \sin. y \cos. x,$$
$$\sin.(x-y) = \sin. x \cos. y - \sin. y \cos. x,$$
$$\cos.(x+y) = \cos. x \cos. y - \sin. x \sin. y,$$
$$\cos.(x-y) = \cos. x \cos. y + \sin. x \sin. y.$$

§. 156. Wenn man in der dritten Gleichung $x = y$ macht, so ist:

$$\cos. 2x = \cos. x^2 - \sin. x^2;$$

und da $\cos. x^2 + \sin. x^2 = 1$; so folgt, daß

$$\cos. x^2 = 1 - \sin. x^2,$$
$$\cos. 2x = 1 - 2\sin. x^2;$$

woraus: $\sin. x^2 = \frac{1 - \cos. 2x}{2}$;

und $\sin. x = \sqrt{\frac{1 - \cos. 2x}{2}}$.

§. 157. Addirt man die beiden ersten Gleichungen (§. 155), so ist:

$\sin.(x+y)+\sin.(x-y) = 2\sin. x \cos. y$;

woraus $\sin. x \cos. y = \frac{\sin.(x+y)+\sin.(x-y)}{2}$.

Setzt man $x+y=p$, $x-y=q$,

so ist: $2x=p+q$, $2y=p-q$:

woraus: $\sin. p+\sin. q=2\sin.\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos.\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

§. 158. Addirt man die beiden letzten Gleich. (§. 155), so ergiebt sich:

$$\cos. x \cos. y = \frac{\cos.(x+y)+\cos.(x-y)}{2};$$

daher

$$\cos. p+\cos. q = 2\cos.\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos.\left(\frac{p-q}{2}\right);$$

§. 159. Zieht man die dritte (§. 155) Gleich. von der vierten ab, so hat man:

$$\sin. x \sin. y = \frac{\cos.(x-y)-\cos.(x+y)}{2},$$

daher:

$$\cos. q-\cos. p = 2\sin.\frac{p+q}{2}.\sin.\frac{p-q}{2}.$$

§. 160. Wegen der Gleichung

$$2\sin. x = \text{Sehne } 2x,$$

hat man §. 156: $\text{Sehne } 2x = 2\sqrt{\frac{1-\cos. 2x}{2}}$,

und setzt man $2x = x$, so ist

$$\text{Sehne } x = 2\sqrt{\frac{1-\cos. x}{2}} = \sqrt{(2-2\cos. x)}.$$

Nennt man k die Sehne eines Bogens, c den Cosinus, s den Sinus, h die Sehne des Complements, so ist:

$$k^2 = 2 - 2c, \text{ und } h^2 = 2 - 2s.$$

Die erste von diesen zwei Gleichungen giebt:

$$c = 1 - \tfrac{1}{2}k^2; \text{ und da:}$$

$$s = \sqrt{1 - c^2} = \sqrt{k^2 - \tfrac{1}{4}k^4} = k\sqrt{1 - \tfrac{1}{4}k^2},$$

so ist: $h^2 = 2 - 2k\sqrt{1 - \tfrac{1}{4}k^2}$.

Aufgabe.

§. 161. In einem gleichseitigen Triangel ABC (Fig. 79), ein Quadrat ebcd zu beschreiben. (Fig. 124.)

Auflösung I.

Wenn man sich der gegebenen Seiten des Tr. bedienen will, so sei aus dem Mittelp. A, mit dem Halbm. AB, der Halbkr. BCDE beschrieben (§. 64).

Aus dem Mittelp. E, mit dem Halbm. CE, sei ein Bog. beschrieben, welcher die gegebene Seite AB in b schneidet: aus dem Mittelp. A, mit dem Halbm. Bb, sei auch ein Bogen beschrieben, welcher dieselbe Seite in e schneidet; aus den Mittelp. e, b, mit dem Halbm. eb beschreibe auch 2 Bog., welche die Seiten AC in d, und CB in c schneiden; so ist ebcd das gesuchte Quadrat.

Beweis. Um abzukürzen, sei
AB = 1, so ist:
Eb = EC = BD = $\sqrt{3}$ (§. 2); woraus:
Bb = BE — Eb = 2 — $\sqrt{3}$ = Ae; hieraus:
be = AB — 2Ae = 2$\sqrt{3}$ — 3
= (2 — $\sqrt{3}$) . $\sqrt{3}$ = bc. Folglich:
Bb:bc = (2 — $\sqrt{3}$) : (2 — $\sqrt{3}$) . $\sqrt{3}$ = 1 : $\sqrt{3}$.
Nimmt man aber an, daß AB in T durch den Perpend. CL halbirt sei, so wird auch
BT : TC = $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (§. 104);
d. h., BT : TC = 1 : $\sqrt{3}$ sein.
Mithin ist bc prll. mit TC (2. B. 6), und folglich perpend. auf AB (27. B. 1).

Dasselbe beweist man für de: demnach ist ebcd das einzuschreibende Quadrat.

Auflösung II.

Sind nur die Winkelsp. A, B, C des Tr. ABC gegeben, und soll die 4 P. b, c, d, e des einzuschr. Qdrts. finden; so beschr. man aus dem Mittelp. E, wie in der vorhergehenden Aufl., mit dem Halbm. EC, einen Bog., der durch b, C, a geht; aus dem Mittelp. B, mit demselben Halbm. werde ein Bog. beschr., der den eben beschr. in a schneidet; aus dem Mittelp. a, mit dem Halbm. AB, sei der Halbkreis BCDE in H geschnitten; und es sei in der Prph.
HI = IK = Ha gemacht;

aus dem Mittelp. D, mit dem Halbm. aK, sei ein Bog. beschr., der durch b geht; so ist der P. b bestimmt; aus dem Mittelp. A, mit dem Halbm. Bb, beschr. ein Bog., der durch den P. e geht; aus dem Mittelp. C, mit dem Halbm. Cb, beschr. einen anderen Bog., welcher den letzten in e schneidet; aus den Mittelp. e, C, mit dem Halbm. be, beschr. zwei Bog., welche sich in d schneiden; aus den Mittelp. b, C, mit demselben Halbm. be, beschr. 2 Bog., die sich in c treffen, so ist bcde das gesuchte Quadrat.

Oder wenn man den Kreis BCDEδ anwendet, Eδ = AB macht; aus den Mittelp. D, δ, mit dem oben bestimmten Halbm. aK, zwei Bog. beschreibt, welche sich in b schneiden; das Uebrige wird wie oben vollendet.

Beweis. Der P. K wird hier wie in der 9ten Fig. (§. 32), mittelst denselben P. a bestimmt, der Bogen BK ist also der 24ste Theil von der Periph.

Man hat ferner in der 9ten Fig.:

$$BK = Bk = EM;$$

vergleicht man die P. a, K, B, k, A, M mit den P. Q, A, R, S, p, B der 4ten Fig., so ergiebt sich für die 9te Fig. die Gleichung:

$$AQ^2 = RQ^2 - AS \cdot pQ \quad (\S. 20)$$

oder diese: $aK^2 = Ba^2 - Kk \cdot Aa.$

aber Kk ist die Sehne von $\frac{1}{12}$ der Periph.

Um ihre Größe zu finden, setzt man, um abzukürzen:

$$AB = 1,$$

so hat man den Sinus von

$$BN = Kk = AX \text{ (Fig. 12)} = \tfrac{1}{2},$$

und das Doppelte seines Cosinus, nämlich:

$$2NX = NO = BD = \sqrt{3}.$$

Setzt man nun Kk für x, und $\sqrt{3}$ für $2\cos.x$, in der Gleichung (§. 159):

$$\text{Sehne } x = \sqrt{2 - 2\cos.x},$$

so erhält man:

$$Kk = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}};$$ woraus:

$$aK^2 = 3 - (\sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}) \cdot \sqrt{2} \text{ (§. 27)}$$
$$= 3 - (\sqrt{3} - 1) = 4 - \sqrt{3}.$$

Beschreibt man nun aus den Mittelp. D, δ, mit dem Halbm. aK, zwei Bogen, die sich in b schneiden, so ist der P. b auf der geraden L. BE (§. 13), welche wenn man $RD = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ macht (§. 104), Dδ in R rechtw. halbirt (§. 14): da nun (47. B. 1):

$$Db^2 = DR^2 + bR^2:$$

so ist:

$$bR^2 = Db^2 - DR^2 = 4 - \sqrt{3} - \tfrac{3}{4} = \frac{13 - 4\sqrt{3}}{4};$$

und hieraus: $bR = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$, u. $bE = \sqrt{3}$.

Aus dem Beweise der Aufl. folgt, daß b einer der Endp. des Quadrats ist; eben so wird man es mit den Mittelp. D, E, u. mit den beiden Halbm. aK, BD, wie in dem ersten Theile der II. Aufl. finden;

da nun in den beiden Tr. CAe, CBb alle ihre Seiten respective gleich sind, so ist auch

W. CBb = CAe (8. B. 1) = CBA;

daher ist der P. e auf der Linie BA und ist ein anderer Endp. des Quadrats. Endlich, weil in dieser zweiten Aufl. die geraden Cb, Ce der Größe u. Lage nach dieselben wie in der ersten Aufl. sind, und auch in der ersten Aufl.

Cd = ed und Cc = bc,

(wegen des gleichseitigen Tr. Ccd und daß cd prll. zu AB ist) (2. B. 6), so sind die P. d, c in dieser zweiten Aufl. wie in der ersten bestimmt.

Aufgabe.

§. 162. In das Quadrat ABLF (Fig. 80) einen gleichseitigen Triangel zu beschreiben, welcher eine Winkelspitze B in einer der Winkelspitzen des Quadrats hat.

Auflösung I.

Aus dem Mittelp. A, mit dem Halbm. AB. sei ein Halbkr. BFE beschrieben, indem man FE = FB macht. Es sei auch

BQ = EQ = BE:

wenn man sich der Durchschnitte der gegebenen Seiten des Quadrats bedienen will; so beschreibe man

aus dem Mittelp. F, mit dem Halbm. FQ, einen Bogen, welcher zwei Seiten des Quadrats in M, N schneidet, so sind B, M, N die Winkelspitzen des gesuchten Tr.

Beweis. Der Winkel QAB ist ein rechter, (§. 84), daher:

$$BQ^2 = AB^2 + AQ^2 \text{ (47. B. 1).}$$

Man macht um abzukürzen AB = 1, so ist:

$$4 = 1 + AQ^2;$$

woraus: $AQ = \sqrt{3}$;

$$FQ = AQ - AF = \sqrt{3} - 1 = FM = FN;$$

hieraus: $FM^2 = FN^2 = 4 - 2\sqrt{3}$; und folgl.,

$$MN^2 = FM^2 + FN^2 = 8 - 4\sqrt{3};$$

Da nun auch:

$$LM = LF - FM = 1 - (\sqrt{3} - 1) = 2 - \sqrt{3};$$

so ist: $LM^2 = 7 - 4\sqrt{3}$; daher:

$$BM^2 = BL^2 + LM^2 = 8 - 4\sqrt{3} = MN^2:$$

man beweist eben so, daß:

$$BN^2 = MN^2; \text{ folgl.}$$

$$BM = MN = BN.$$

Auflösung II.

Nimmt man nun die vier Endpunkte A, B, L, F des Quadrats als gegeben an, so beschreibet nachdem, wie in der ersten Aufl. der P. Q gefunden ist, man aus dem Mittelp. F, mit dem Halbm. FQ, die Peripherie QRSNM. Dann mache man

QR = RS = SN = FQ,

aus dem Mittelp. B, mit dem Halbm. BN schneide diese Periph. in M; so sind B, N, M die Winkelsp. des gesuchten Triangels.

Beweis. Der Bog. QRSN ist die Hälfte der Periph. (15. B. 4): also liegt N auf der geraden L. QFA, und liegt von F so weit als in der ersten Aufl.; daher ist er derselbe. Der P. M findet sich auch in der ersten Aufl., wie in der zweiten, in dem Durchschnitt der beiden aus den Mittelp. F, M, mit den gl. Halbm. FQ, BN beschr. zwei Bogen; mithin ist er derselbe; folgl. u. s. w.

Aufgabe.

§. 163. In einem gleichseitigen Triangel, dessen Winkelspitzen p, q, R gegeben sind, ein reguläres Achtseit zu beschreiben.

Auflösung.

Theilet die Weite QR (Fig. 81) in drei gleiche Theile, in c, d (§. 68); aus den Mittelp. c, d, mit dem Halbm. cd, beschr. zwei Bogen, welche sich in A schneiden, mit demselben Halbm., aus A als Mittelp., beschreibet einen Kr; nehmet auf der Periph.

cB = BC = CD = DE = dc;

so sind B, C, D, E, d, e die Winkelsp. des eingeschriebenen Sechsseits.

Be-

Beweis. In dem Tr. BcQ sind die Seiten Bc, Qc gleich den Seiten Ad, cd des Tr. Adc: überdem ist der von diesen Seiten eingeschl. W. wegen des Parallelismus der Linien Bc, Ad (27. B. 1); in jedem Tr. gleich: es sind also diese zwei Tr. gl. (4. B. 1), und der

$$\text{W. } cQB = dcA = cQP:$$

folgl. ist B auf der geraden L. PQ: auf gleiche Weise beweist man, daß die andern P. C, D, E auf den Seiten des gegebenen Tr. sind; folgl. ꝛc.

Aufgabe.

§. 164. In einem gegebenen Quadrat ABLF, ein reguläres Achtseit zu beschreiben.

Auflösung I.

Will man sich der Durchschnitte der Seiten des gegebenen Qdrts. bedienen, so beschr. man aus A, als Mittelp. (Fig. 82), mit dem Halbm. AB, den Halbkr. BCDE, mache

$$BC = CD = DE = AB;$$

ferner: $BQ = BF$, $EQ = EA$;

mit dem Halbm. AQ, aus dem Mittelp. A, bestimme die P. b, g; dann schneidet mit demselben Halbm., aus den P. B, L, F, die Seiten in a, d, c, f, e, h, so sind diese P. die Winkelsp. des Achtf. abcdefgh.

Auflösung II.

Nachdem man den P. Q, wie in der ersten Auflösung, bestimmt hat, so beschr. mit dem Halbm. AQ, aus den P. A, B, als Mittelp. zwei Bogen, die sich in O schneiden; mit demselben Halbm., aus dem Mittelp. A, bestimmt den P. b, in der Seite AB; aus O, als Mittelp., mit dem Halbm. Ob, beschreibt einen Kr., welcher die Seiten des Quadrats in den andern P. c, d, e, f, g, h, a schneidet; diese Punkte sind die Winkelsp. des Achtseits.

Auflösung III.

Kennt man aber nur die vier Winkelsp. A, B, L, F, so bestimmt man den P. Q, wie in der ersten Aufl.; macht

EM = EC, und BM = BF:

mit dem Halbm. AM, aus dem Mittelp. A, beschr. einen Bogen, welcher durch c, d geht; mit demselben Halbm., aus dem Mittelp. B, beschr. einen Bogen, welcher durch f, g geht; mit demselben Halbm., aus dem Mittelp. L, beschr. einen Bogen, welcher durch h, a geht; mit demselben Halbm., aus dem Mittelp. F, beschr. einen Bg., der durch b, c geht; mit dem Halbm. AQ, aus den Mittelp. A, B, L, F, schneidet diese Bog. in b, g, d, a, c, f, e, h; so sind diese P. die Winkelsp. des Achtseits.

Beweis. Der Einfachheit wegen, setze man:

$AB = 1$, so ist:

$AM = \frac{1}{2}\sqrt{6}$ (§. 104);

$AQ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$,

und mittelst der Gleichung:

$Bd^2 = AQ^2 = \frac{1}{2}$

hat man: $Ad^2 = AM^2 = \frac{6}{4} = 1 + \frac{1}{2} = AB^2 + Bd^2$: mithin ist der W. ABd ein R. (48. Buch 1), und folglich der P. d auf der geraden Linie BL.

Auf gleiche Weise beweist man, daß alle andere P. auf den Seiten des gegebenen Quadrats sind; überdem ist:

$Ld = BL - Bd = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} = Le$,

und $de^2 = Ld^2 + Le^2$ (47. B. 1) $= 2Ld^2$:

Woraus:

$de = Ld\sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$.

Es ist aber:

$cd = BL - Ld - Bc = BL - 2Ld$

$= 1 - 2 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$:

mith. $cd = de$.

Auf gleiche Weise beweist man, daß alle Seiten des Achtseits unter sich gleich sind. Da ferner: die Tr. Lde, Bbc, Aha, Ffg in allen Stücken gleich sind, so sind auch ihre W. in a, b, c, d, e, f, g, h gleich: folgl. auch ihre Supplemente, d. h. die W. des Achtseits sind auch gleich (13. B. 1).

Aufgabe.

§. 165. Wenn ein reguläres Achtseit ABhgfFGH gegeben, auf eine leichte Art 1) die Seite eines regulären Achtseits zu finden, dessen Fläche das doppelte; 2) die Seite eines Achtseits, dessen Fläche das dreifache von dem gegebenen ist (Fig. 66).

Auflösung.

Mit der Seite AB des gegebenen Achtseits als Halbm., aus F, H als Mittelp., beschr. zwei Bog., welche sich in a schneiden:

1. af oder aA wird die Seite des doppelten Achtseits sein.
2. AB oder ag wird die Seite des dreifachen Achtseits sein.

Beweis. Wenn man AB = 1 setzt, so wird man finden, daß:

$$aA = af = \sqrt{2} \text{ (§. 139)};$$
$$aB = ag = \sqrt{3} \text{ (§. 2)}.$$

Aber die Flächen ähnlicher Figuren verhalten sich unter einander, wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten (20. Buch 6); folglich wird aA die Seite eines doppelten Achtseits und AB die Seite eines dreifachen sein.

Aufgabe.

§. 166. In einem Kreise, dessen Halbmesser AB (Fig. 83) gegeben, drei Kreise zu beschreiben, welche ihn, und sich unter einander berühren.

Auflösung.

In der Periph. der gegebenen Kreises sei

BC = CD = DE = Ed = dc = AB

gemacht; aus B, mit BD, werde ein Bogen beschr., welcher durch a, p u. α geht: aus E, mit demselben Halbm. BD, sei dieser Bogen in a, α geschnitten: mit demselben Halbm., aus den Mittelp. C, c beschr. zwei Bogen, welche sich in V schneiden, und aus D, d, zwei andere Bogen, die sich v schneiden; aus V, v, mit demselben Halbm., beschr. zwei Bog., welche durch m, n gehen; aus a, α, mit AB, sei die Peripherie des gegebenen Kr. in G, H, und in g, h geschnitten. In dieser Peripherie mache

GL = HI = gl = hi = dem Halbm. AB:

es sei BF = Aa; LY = IY = ly = iy = IL;

Fm = Fn = Yy; Dp = Dn.

Aus dem Mittelp. A, mit dem Halbm. mn, beschreibe den Kreis PSRXQT, auf dessen Peripherie man einen beliebigen P. P nimmt, und nun

PS = SR = RX = XQ = QT = PA

macht: endlich aus P, Q, R, mit dem Halbm. pn, beschr. drei Kreise; diese berühren sich unter sich und den gegebenen Kreis.

Beweis. Da IL die Sehne von einem Zwölftel der Peripherie ist (§. 32), so hat man:

$$IL = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \text{ (§. 160);}$$

und da (47. B. 1., 31. B. 3.) das Quadrat des Durchmessers

$$Li^2 = IL^2 + Ii^2,$$

so ist: $4 = 2 - \sqrt{3} + Ii^2$;

hieraus: $Ii^2 = 2 + \sqrt{3}$,

und $Ii = \sqrt{(2 + \sqrt{3})}$.

Es ist demnach (§. 20):

$$aI^2 = aB^2 - Ii \cdot Aa = 3 - \sqrt{(4 + 2\sqrt{3})}$$
$$= 3 - (1 + \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3}; \text{ woraus:}$$

$$aI = IL = \sqrt{2 - \sqrt{3}};$$

aus denselben Gründen ist auch aL = LI; daher ist IYL ein Rhombus, und es ist (§. 139):

$$aY^2 = 4 \cdot aI^2 - IL^2 = 3 \cdot IL^2;$$

hieraus: $aY = IL \cdot \sqrt{3}$:

aber die P. I u. L sind von A gleich weit entfernt, folgl. liegen die drei P. a, Y, A in derselben geraden L. (§. 13); hieraus:

$$AY = Aa - aY = \sqrt{2} - \sqrt{(6 - 3\sqrt{3})}$$
$$= \sqrt{2} - (3\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}) = \sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}} = IL.$$

Derselbe Beweis ist auf die Linie Ay anzuwenden: da

nun der Punkt y auf der Linie a∞ ist, d. h. auf aA (§. 13), so ist Yy = 2AY: folglich sind die P. V, B, A, E, v in derselben geraden Linie (§. 13). Nimmt man an, daß die P. m, n in derselben geraden Linie liegen, so hätte man:

$$Am = AV - Vm = 2 - \sqrt{3}.$$

Vergleicht man nun die P. C, c, V, B, A, E mit den P. A, B, Q, P, p, q der dritten Figur, so hat man in dieser 83sten Figur:

VB = AE (§. 14); daraus:

AV = 2, und

$Vm = \sqrt{3}$;

auf gleiche Weise beweist man, daß

$An = 2 - \sqrt{3}$:

daher: $Fm^2 = Am^2 + AF^2$ (47. B. 1.)

$= 7 - 4\sqrt{3} + 1 = 4(2 - \sqrt{3})$;

folglich: $Fm = 2\sqrt{(2 - \sqrt{3})} = 2AY$;

ferner ist aus der Constr. der Figur:

$Fn = 2\sqrt{(2 - \sqrt{3})}$:

mithin ist m in der geraden Linie VA. Dasselbe beweist man für den P. n; weil nun

$Am = 2 - \sqrt{3}$;

so ist: $mn = 4 - 2\sqrt{3}$;

da nun die Dr. BpD, vnD unter einander gleiche Seiten haben, so ist

W. Dvn = DBp (8. B. 1).

Da aber W. Dvn derselbe als W. DvB, und gleich

W. DBV ist (5. B. 1), so hat man W. DBp = DBv: daher ist p in der geraden Linie AE; nachgehends hat man auch Dn = Dp. Auf gleiche Weise beweist man, daß dn = dp; vergleicht man die P. D, d, A, n, p, E der 83sten Fig. mit den P. A, B, Q, P, p, q der dritten Fig., so wird man finden (Fig. 83): daß

$$pE = An = 2 - \sqrt{3};$$ daher:

$$pn = AE - 2An = 1 - 4 + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 3.$$

Da ferner der gleichseitige Tr. PQR ähnl. dem gleichseitigen Tr. BDd, und folgl. auch der Tr. ABD ähnlich dem Tr. APR (20. B. 6), so ist:

$$AB : BD = AP : PR;$$

d. h.: $1 : \sqrt{3} = 4 - 2\sqrt{3} : PR;$

hieraus folgt: $PR = 4\sqrt{3} - 6 = 2pn.$

Da nun die Linie PR in p halbirt ist; so liegt p gleichfalls auf den beiden Peripherien der aus P, R beschr. Kreise, und ist der Berührungsp. (12. B. 3): nimmt man zu $AR = mn = 4 - 2\sqrt{3}$, den Halbmesser des aus R beschr. Kreises hinzu, oder auch $Rr = np = 2\sqrt{3} - 3$, so ist:

$$Ar = 4 - 3 = 1 = AB.$$

Folgl. ist der P. r gleichf. auf beiden Prph. zugleich, u. der aus R beschr. Kr. berührt den gegebenen Kr. innerhalb (11. B. 3). Dasselbe beweist man auch für die andern Kreise; folglich u. s. w.

Diese Aufgabe findet sich zierlich mit dem Lineal und Zirkel von Thomas Simpson gelöst, in seinem Werke: Select Exercises etc. Géometrical problems, problême 13. Man sieht, daß man nach unserer Constr. diese Aufg. mit dem Lineal und dem Zirkel noch kürzer lösen kann, als es Simpson gethan hat, indem man Vav zieht, und nachdem man

$$BV = Ev = AB,$$

und $Vm = Bp = vm = BD$

genommen; dann aus A, mit dem Halbm. mn, den Kreis PQR beschreibt, und das Uebrige der Constr. wie in der vorigen Auflösung ausführt.

Aufgabe.

§. 167. Aus dem Mittelpunkt A (Fig. 83), einen Kreis zu beschreiben, welcher außerhalb die drei Kreise berührt, die nach der vorigen Aufgabe (§. 166) in einen gegebenen Kreis beschrieben wurden.

Auflösung.

Suchet eine dritte Proportionale zu AB, Am (§. 86); mit dieser Linie als Halbm., aus dem Mittelp. A, beschr. einen Kreis; dieses ist der gesuchte Kreis.

Beweis. Da $AB = 1$, und $Am = 2 - \sqrt{3}$, so ist die dritte Proportionale $= 7 - 4\sqrt{3}$.

Zieht man nun von dem Halbm. Ar = 1, den Durchm. qr des aus R beschr. Kr. ab, d. h. wenn man 2np = 4√3 − 6 abzieht, so hat man genau

7 − 4√3.

Ein aus A, mit dieser dritten Proportionale als Halbm. beschr. Kreis, berührt folgl. in q diesen eingeschr. Kreis (12. B. 3), und berührt auch die beiden andern Kreise.

Aufgabe.

§. 168. In einen Kreis mit einem gegebenen Halbmesser AB (Fig. 84) vier Kreise zu beschreiben, die ihn und sich unter einander berühren.

Auflösung.

In der Pheripherie des gegebenen Kr. sei:

BC = CD = DE = AB;
Ba = Ea = BD;
BF = Bf = Aa;
FN = FO = AB;
und NP = OP = BD

gemacht: aus A, mit aP, beschr. den Kreis QRST; nimmt man nun in der Periph. einen beliebigen P. Q, macht

FR = ES = fT = BQ;

endlich beschr. man aus Q, R, S, T, mit aT, vier Kreise; diese sind die verlangten Kreise.

Beweis. Da (§. 27): $BF = FE = Ef = fB$, so ist auch (§. 93):

$$QR = RS = ST = TQ:$$

also ist TAQ ein rechter W.; folgl.:

$$TQ^2 = AT^2 + AQ^2 = 2AT^2;$$

macht man nun $AB = 1$; so ist auch (§. 165): $FP = 1$; daher: $AP = 2$: auch ist (§. 27):

$$Aa = \sqrt{2};$$

$$\text{also: } aP = 2 - \sqrt{2};$$

$$aT = \sqrt{2} - 1.$$

Hieraus:

$2AT^2 = 2aP^2 = TQ^2 = 2(2 - \sqrt{2})^2$; und

$TQ = (2 - \sqrt{2})\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$

$= 2aF$:

folgl. ist die Entf. der beiden Mittelp. T, Q gleich der Summe der Halbm, der beiden aus diesen Punkten beschr. Kreise; mithin berühren sie sich in der Mitte p von TQ. Dasselbe würde man auch für irgend zwei andere Kreise beweisen. Es sei endlich r der P., wo die verlängerte Ar den aus R beschr. Kreis schneidet, so ist:

$Ar = AR + Rr = aP + aF = PF = 1 = AB$:

der Punkt r liegt also auf der Periph. des gegebenen Kr.; hieraus erhellet, daß die durch die beiden Mittelp. A u. R gehende gerade Linie Ar perpendikular auf der Tangente ist, welche beide in r berührt: folglich berühren sie sich (13. u. 16. B. 3);

derselbe Beweis läßt sich auch auf die andern Kreise anwenden.

Aufgabe.

§. 169. Aus dem Mittelpunkt A (Figur 84), einen Kreis zu beschreiben, der die vier, in (§. 168) im Kreise beschriebenen Kreise berührt.

Auflösung.

Suchet eine dritte Proport. zu FP, Fa (§. 86); mit dieser als Halbm., beschr. aus dem Mittelp. A, einen Kreis, so ist dieß der gesuchte Kreis.

Beweis. Da $PF = 1$, und $Fa = \sqrt{2} - 1$, so ist die dritte Proportionale $= 3 - 2\sqrt{2}$; wäre nun q der P., wo der Halbm. Ar den aus R beschriebenen Kreis schneidet; so ist qr dessen Durchmesser $= 2aF = 2\sqrt{2} - 2$; subtrahirt man diesen Werth von $1 = Ar$, so bleibt:

$Aq = 3 - 2\sqrt{2} =$ dieser dritten Proport.: der P. q befindet sich also in beiden Periph.; aber er liegt auch in AR, folgl. ist der Perpend. auf dieser Linie eine Tangente in q zu den beiden Kreisen, welche sich in q (13. u. 16. B. 3) berühren. Dasselbe beweist man für die andern Kreise.

Aufgabe.

§. 170. Einen Kreisbogen zu finden (Fig. 85), dessen Cosinus gleich der Sehne ist.

Auflösung.

Mit einem Halbm. AB = 1, beschreibe den Bogen BCDE, und mache

BC = CD = DE = DP = CP = AB;

so auch Ba = Ea = BD, und BF = Aa: aus dem Mittelp. B, und mit dem Halbm. PF, sei ein Bogen beschr., welcher den Bog. BC in Q schneidet; so ist BQ der gesuchte Bogen.

Beweis. Die P. A, F, a, P sind in derselben geraden Linie (§. 13); weil die P. B, A, D, P, die alle von C um CB entfernt liegen, in der Prph. eines Kreises sind, den man aus C, mit CB beschr.; da ferner:

$$BA = AD = DP = CB;$$

so ist BCP der Durchmesser des Kreises (15. B. 6), und man hat:

$$PA = \sqrt{3} \text{ (§. 2)};$$

daher: $PF = \sqrt{3} - 1 = BQ.$

Wenn man nun auf AB den Perpendik. QR fallen läßt, so ist (13. B. 2):

$$BQ^2 = AB^2 + AQ^2 - 2AB \cdot AR;$$

d. h.: $(\sqrt{3}-1)^2 = 4-2\sqrt{3} = 2-2AR$;
hieraus $AR = \sqrt{3}-1 = BQ$.

Diese letzten Aufg. sind von Ozanam, welcher sie mit dem Lineal und Zirkel aufgelöst hat.

Aufgabe.

§. 171. Es sind die Axen BE, MN einer Ellipse gegeben; man soll um sie ein aus Kreisen zusammengesetztes Oval beschreiben, welche sich unter einander berühren (Fig. 86).

Auflösung.

Aus dem Mittelp. A, wo die Axen sich schneiden, mit dem Halbm. AB, welcher die Hälfte der größern Axe ist, beschr. den Halbkr. BDE, und mache ED = EA, aus B, mit BD, schneide die Axe BE in d: aus dem Mittelp. A, mit dem Halbm. AM, werde die halbe Axe AE in m geschnitten; aus demselben Mittelp. A, mit dem Halbm. Ad, beschr. man den Bogen de, und mache de = Em; aus den Mittelp. d, e, mit einem beliebigen Halbm., sei der Bogen BDE in δ u. ε geschnitten; aus dem Mittelp. A, mit dem Halbm. Aδ, sei die Axe in P u. Q geschnitten; aus P, Q, mit PB = QE, werden die Bogen FBf, GEg beschr., und

BF = Bf = EG = Eg = PB,

ferner: PR = Pr = QR = Qr = PQ gemacht.

Dann beschr. man aus R, mit RF, den Bogen FG, welcher durch M gehen wird: endlich aus r, mit RF = rf den Bogen, welcher durch N geht, so ist die ganze Construktion gemacht.

Beweis. Da die Tr. BFP, PQR gleich sind, so sind die W. BPF, QPR gleich (8. B. 1); und die zwei Linien FP u. PR bilden eine einzige gerade Linie, weil die beiden W. FPA + APR = den beiden W. FPA + APN (13 u. 14. B. 1): folglich berühren sich die beiden Bogen BF, FG gegenseitig in F (13. B. 3).

Derselbe Beweis läßt sich auf die Berührungsp. f, G, g anwenden.

Zur Abkürzung mache man AB = 1; dann ist:

BD = $\sqrt{3}$ (§. 2) = Bd; daher:

Ad = $\sqrt{3} - 1$; und da (§. 93):

Ad : de = Aδ : δ_ε;

so ist, wenn man die beiden Glieder des ersten Verhältnisses mit $\sqrt{3} + 1$ (4. B. 5) multiplicirt:

Ad . ($\sqrt{3} + 1$) : de . ($\sqrt{3} + 1$) = Aδ : δ_ε;

subtrahirt man nun die Zahlenwerthe von Ad u. Aδ, und führt die Multiplic. im ersten Gliede aus, so ist:

2 : de . ($\sqrt{3} + 1$) = 1 : δ_ε;

Hieraus:

$2\delta_\varepsilon$ = 2 AP = de . ($\sqrt{3} + 1$) = PQ = PQ.

Ueberdem, da PRQr ein Rhombus ist, so hat man (§. 139):

$Rr^2 = 4PR^2 - PQ^2 = 3PR^2$;

hieraus: $Rr = PR \cdot \sqrt{3} = de \cdot (2 + \sqrt{3})$,

und $RA = \frac{1}{2} de (3 + \sqrt{3})$.

Nachgehends hat man:

$AM = Am = AE - Em = AE - de = 1 - de$;

Woraus: $RA + AM = 1 + \frac{1}{2} de \cdot (1 + \sqrt{3})$;

oder auch: $RM = 1 + \frac{1}{2} PR$;

und da: $PF = PB = 1 - AP = 1 - \frac{1}{2} RP$,

so ist: $PF + PR = 1 + \frac{1}{2} PR$,

d. h., $FR = RM$.

Folglich wird der Bog. FG durch M gehen: eben so zeigt man, daß der Bogen fg durch n geht; folglich, und so weiter.

Aufgabe.

§. 172. Eine aus mehreren Kreisbogen zusammengesetzte Schneckenlinie (Fig. 87) BLEMFNGPH zu beschreiben.

Auflösung.

Es sei BE = Bf die Weite, welche man den Windungen dieser Spirale geben will. Nachdem man BE in A (§. 66) halbirt hat; so beschr. man aus diesem P., als Mittelp., mit dem Halbm. AB, den Halbkr. BLE (§. 64); aus B, mit BE, sei der Halbkr. EMF beschr.; ferner aus dem Mittelp. A, mit dem Halbm. AF, der Halbkr. FNG; dann noch aus B, mit

BG

BG den Halbkr. GPH; auf dieselbe Weise könnte man diese Spirale ins Unendliche fortsetzen.

Auf gleiche Weise könnte man diese Spirale verdoppeln; indem man aus den Mittelp. A, B wechselsweise die Halbkr. ble, emf, fng, gph u. s. w. beschr., nachdem man zuvor den P. b in einer beliebigen Entfernung von B auf der Linie AB genommen hat (S. 73).

Diese Aufgabe bedarf keines Beweises.

Aufgabe.

§. 173. $\sqrt{V2}$ und $\sqrt{V3}$ zu finden.

Auflösung.

Mit dem Halbm. AB = 1, aus dem Mittelp. A, beschreibt (Fig. 88) den Halbkr. BCDE, und machet BC = CD = DE = AB;

dann Ba = Ea = BD;

BP = Aa, EP = AB:

bemerket auf dem Halbkr. die Punkte H, I, K, indem man

aH = HI = IK = derselben Linie AB macht.

Aus E, H, mit AP, seien zwei Bogen beschr., die sich in L, M schneiden; dann ist LM = $\sqrt{V2}$. Aus a, K, mit AB, seien zwei Bog. beschr., welche sich in Q, R schneiden; so ist QR = $\sqrt{V3}$.

Beweis. Da ELHM ein Rhombus ist, so wird man haben (§. 139):

$$LM^2 = 4LH^2 - HE^2 = 4AP^2 - AE^2.$$

Aber $AP^2 = \frac{1}{2}$ (§. 104),

$HE^2 = 2 - \sqrt{2}$ (§. 30 u. §. 36):

also $LM^2 = \sqrt{2}$;

woraus: $LM = \sqrt{\sqrt{2}}$.

Da auch aQKR ein Rhombus ist, so ist gleichfalls:

$$QR^2 = 4 \cdot aQ^2 - aK^2.$$

Aber $AQ^2 = AB^2 = 1$;

$aK^2 = 4 - \sqrt{3}$ (§. 160):

folglich: $QR^2 = \sqrt{3}$;

woraus: $QR = \sqrt{\sqrt{3}}$.

§. 174. Durch ähnliche Kunstgriffe könnte man die vierten Wurzeln aus den andern ganzen Zahlen erhalten, ohne die Methode, mittlere Proport. zu finden, anzuwenden (§. 99).

Um die $\sqrt{\sqrt{2}}$ nach dieser Methode zu haben, muß man eine mittlere Proport. zwischen 1 u. $\sqrt{2}$ finden, oder zwischen $\frac{1}{2}$ und $2\sqrt{2}$, oder zwischen zwei andere Größen, welche, mit einander multiplicirt, gl. $\sqrt{2}$ wären. Aber dieser Gang würde viel zu verwickelt sein.

Wird diese Geometrie des Zirkels bearbeitet, so wird man große Vortheile daraus ziehen. Ich habe über diese Materie noch andere Untersuchungen ganz

fertig liegen, welche in einem ausgedehnteren Werke als dieß Platz finden könnten.

Hier folgt eine Anwendung der vorhergehenden Aufgabe auf die reguläre dreiseitige Pyramide.

Aufgabe.

§. 175. Wenn die Seite AB einer regulären dreiseitigen Pyramide SABC (Fig. 89) gegeben ist, so soll man finden: 1) ihre Höhe; 2) die Seite eines ihrer Oberfläche gleichen Quadrats; 3) die Seite des Quadrats, über welcher man eine Pyramide construiren soll, deren Höhe die gegebene Pyramidenseite ist, und mit gedachter gleichen körperlichen Inhalt hat; 4) die Seite des Quadrats, über welches man eine Pyramide construiren soll, die mit der gegebenen gleiche Höhe und gleichen körperlichen Inhalt hat; 5) den Halbmesser einer umschriebenen Kugel.

Auflösung.

Die 88ste Fig. sei mit dem Halbm. AB, wie in der 173sten Aufgabe construirt, es sei aus B, mit Ba, der Bogen aN beschr., und EN = Aa gemacht; aus A, E, mit AN, seien zwei Bog. beschr., welche sich in n schneiden: mit demselben Halbm. nA, schnei-

det den Halbkr. BCDE in S. Endlich halbire LM in m (§. 66), so wie QR in q, so ist:

1. BS die Höhe der Pyramide;
2. QR die Seite des Quadrats, welches ihrer Oberfläche gleich ist:
3. Mm die Seite des Qdrts., welches die Grundfläche einer Pyramide, deren Höhe gleich der gegebenen Pyramidenseite, und mit ihr gleichen Inhalt hat.
4. Qq die Seite des Quadrats, welches die Grundfläche einer Pyram. ist, die mit der gegebenen gleiche Höhe u. gleichen körperlichen Inhalt hat.
5. AN der Durchm. einer umschriebenen Kugel.

Beweis. Fället man aus der Spitze S der Pyram. einen Perpend. Sm auf die Seite AB, so wird, da Tr. SAB gleichseitig ist, dieser Perpend. AB in m halbiren (12. B. 1). Wenn man daher auf der Grundfl. ABC, in m, den Perpend. mT errichtet, so geht er durch C (11. B. 1), und enthält den P. T, wohin der aus der Spitze S auf die Grdfl. gefällte Perpend. trifft (11. B. 11).

Eben so beweist man, daß T in der Linie Bn liegt, welcher die Seite AC in zwei gleiche Theile theilt. Ziehe mn, sie ist prll. zu BC (2. B. 6), u. der Tr. Amn dem Tr. ABC gleichwinkl. (27. B. 1), u. BC ist das Dopp. von mn (4. B. 6); ferner wer-

den die Tr. BCT, mnT respective gleiche W. haben, daher (4. B. 6):

$$BC : mn = CT : mT.$$

Mithin ist CT das Doppelte von mT; also $mT = \frac{1}{3}Cm$: macht man ferner $AB = 1$, so ist:

$$Cm = Sm = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \text{ (§. 104)};$$

folgl. $Tm = \frac{1}{6}\sqrt{3}$.

Da überdem:

$$Sm^2 = mT^2 + ST^2 \text{ (47. B. 1)};$$

d. h. $\frac{1}{4} = \frac{1}{12} + ST^2$;

so ist: $ST^2 = \frac{3}{12} = \frac{2}{3}$;

woraus: $ST = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Es ist also (Fig. 88):

$AN = \frac{1}{2}\sqrt{6}$ (§. 104) $= \sqrt{\frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = An$:

nun ist auch (Fig. 89):

$$An : AS = AS : SB \text{ (§. 86)};$$

d. h., $\sqrt{\frac{3}{2}} : 1 = 1 : SB$;

daher: $SB = \sqrt{\frac{2}{3}} = ST$;

welches 1stens zu beweisen war.

Die Oberfläche der dreiseitigen Pyram. ist gleich der vierfachen Grundfl. ABC (Fig. 89); und da diese $= \frac{1}{4}AB = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ ist (41. B. 1), so ist die Oberfl. der Pyram. $= \sqrt{3}$; demnach die Seite des ihr gleichen Quadrats $= \sqrt{\sqrt{3}}$: aber man hat (Fig. 88) $QR = \sqrt{\sqrt{3}}$ (§. 173); folglich ist QR die Seite des gesuchten Quadrats, w. z. t. w.

Da nun, in gleichen Pyramiden, die Grundflächen in umgekehrten Verh. der Höhen sind (9. B. 12); so ist:

$1 : \sqrt{\frac{3}{3}} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$: der Grdfl. der Pyram., deren Höhe AB = 1; woraus der Inhalt dieser Grdfl. $= \frac{1}{4}\sqrt{2}$, und die Seite des ihr gleichen Quadrats $= \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}} =$ Mm (§. 173), w. 3tens z. b. w.

Nun verhalten sich Pyramiden von gleicher Höhe wie ihre Grdfl., daher das dem Tr. ABC $= \frac{1}{4}\sqrt{3}$, gleiche Quadrat zur Seite $\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{3}} =$ Qq hat (§. 173), w. 4tens z. b. w.

Endlich ist das Quadrat des Durchm. der um die dreiseitige Pyramide beschriebenen Kugel $1\frac{1}{2}$ mal das Qdrt. der Pyramidenseite (13. B. 13), d. h. der Durchm. ist $= \sqrt{\frac{3}{2}}$: er ist folgl. gleich AN, w. 5tens z. b. w.

Aufgabe.

§. 176. Die Höhe ST (Fig. 89 und 88) einer dreiseitigen regulären Pyramide ist gegeben, man soll ihre Seite AB finden.

Auflösung.

Mit einem Halbm. AB (Fig. 88) = ST (Fig. 89), beschr. den Halbkr. BCDE, und mache

BC = CD = DE = AB.

Aus B, mit BD, beschr. den Bogen DNa; aus E, mit demselben Halbm., sei dieser Bog. in a geschnitten; aus demselben Mittelp. und mit demselben Halbmesser Aa, durchschneide denselben Bogen in N; so ist AN die gesuchte Seite gleich der Seite AB der 89sten Figur.

Beweis. Man hat in der 88sten Figur:

$$AB : AN = 1 ; V\tfrac{1}{2} \quad (\S.\ 175).$$

und da $1 : V\tfrac{1}{2} = V\tfrac{2}{3} : 1$,

weil hier das Prod. der äußern gleich dem Prod. der mittlern Gl., so ist:

$$AB : AN = V\tfrac{2}{3} : 1;$$

d. h. AB verhält sich zu AN, wie die Höhe der dreiseitigen Pyramide zu ihrer Seite (§. 175); folglich, u. s. w.

Aufgabe.

§. 177. Die Linie AB = 1 (Fig. 90) in fünf gleiche Theile zu theilen, selbst dann, wenn man von AB keine fünffache Linie wie in §. 69 haben kann.

Auflösung.

Nachdem aus dem Mittelp. A, mit dem Halbm. AB der Kreis BDp beschr., und in der Periph.

$$BC = CD = DE = AB,$$

und $Ba = B\alpha = Ea = E\alpha = BD$

gemacht, so schneide man aus dem Mittelp. α, und mit dem Halbm. AB, die Periph. in g; aus diesem P. g, als Mittelp., und mit demselben Halbm., sei der Bogen Anα beschr.; nun sei aus a, mit BE, dieser Bg. in n geschnitten; aus B, mit αn, werde die Periph. in P u. p geschnitten; aus p, P, mit demselben Halbmesser pB, beschr. zwei Bogen, welche sich in Q schneiden; so ist AQ $\frac{1}{5}$ von AB, und liegt in ihrer Richtung.

Beweis. Wenn man einen P. u in der Richtung von AE nimmt, und man hätte Au = Aa, so ist: da aAu, αAu rechte W.:

$$au^2 = 2Aa^2 = 2\alpha A^2 = \alpha u^2 = 4 = BE^2;$$

woraus: au = αu = BE = an.

Da nun die beiden gleichen W. gAB, gAα jeder die Hälfte eines rechten W. ist (§. 30), so sind die unter sich gleichen W. gAa, gAu jeder gleich $\frac{3}{2}$R. Daher die beiden Tr. gAa, gAu, die einen gl. W. zwischen gleichen Seiten haben, auch ihre dritten Seiten ga, gu gl. haben (4. B. 1); ein aus g mit ga beschr. Kr., gehet folglich durch den P. u, und ist dem Kreise Anα concentrisch.

Man hat nachgehends ga = $\sqrt{5}$ (§. 185); und da an = uα, so ist (§. 93):

$$ga : gA = au : n\alpha;$$

d. h., $\sqrt{5} : 1 = 2 : n\alpha$.

Es ist also $n\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$; daher auch jede Seite des Rhombus:

$$PBpQ = n\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

vergleicht man daher die P. P, B, p, Q, A der Fig. 90, mit den P. A, p, B, P, Q der 3ten Fig.; so ist für die 90ste Fig.:

$$BQ \cdot BA = BP^2 \text{ (§. 19)},$$

d. h., $BQ = \frac{4}{5}$;

woraus AQ, welche in derselben geraden liegt (§. 13), $= \frac{1}{5}$.

§. 178. Diese Aufgabe, welche eine ziemlich einfache Aufl. hat, mußte hier Platz finden, wegen der Decimal-Theilung, welche man vornimmt, wenn man in 2, dann in 5 Th. oder umgekehrt theilen will. Die folgende Aufgabe ist auch von einigem Nutzen.

Aufgabe.

§. 179. Einen rechtwinkligen Triangel (Figur 90) zu bilden, dessen Seiten in arithmetischer Proportion sind.

Auflösung.

Nachdem man die Constr. der vorhergehenden Aufl. (§. 177) gemacht hat, schneide man aus dem

Mittelp. E, mit dem Halbm. EQ, die Periph. in N; so ist der Tr. BNE der gesuchte Triangel.

Beweis. Dieser Tr. ist rechtw. (31. B. 3); macht man nun AB = 1, so ist:

$$EQ = EA + AQ = \frac{6}{5} = EN;$$

man hat überdem (47. B. 1);

$$BE^2 = EN^2 + BN^2,$$

d. h., $4 = \frac{36}{25} + BN^2$;

es ist folgl.: $BN^2 = \frac{64}{25}$;

woraus $BN = \frac{8}{5}$;

daher die Seiten

$$EN = \frac{6}{5},$$

$$BN = \frac{8}{5},$$

$$BE = \frac{10}{5},$$

in arithmetischer Proportion stehen.

Aufgabe.

§. 180. Einen rechtwinkligen Triangel (Figur 91) zu bilden, dessen Seiten in geometrischer Proportion stehen.

Auflösung.

Aus dem Mittelp. A, mit einem Halbm. AB, beschr. einen Kr. BDd, mache in der Peripherie

$$BC = CD = DE = Ed = dc = AB;$$

ferner: $Ba = Ea = BD$,

u. $Db = db = C\beta = c\beta = Aa$; nun sei aus E, mit $b\beta$, die Peripherie des Kr. in N geschnitten; so ist der Tr. BNE der gesuchte Tr.

Beweis. Die Linie AB ist in b in mittlere und äußere Verhältniß getheilt (§. 46): wenn man daher $AB = 1$, $Ab = x$ macht, so ist

$$Bb = 1 - x,$$

$$\text{und } x^2 = 1 - x;$$

löst man diese letzte Gleich. auf, so ist:

$$x = Ab = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1);$$

woraus folgt:

$$b\beta = 2Ab = \sqrt{5} - 1 = EN;$$

nachgehends ist (31. B. 3) (47. B. 1):

$$BE^2 = EN^2 + BN^2;$$

$$\text{d. h. } 4 = 6 - 2\sqrt{5} + BN^2;$$

hieraus: $BN^2 = 2(\sqrt{5} - 1) = BE \cdot NE$;

also ist (17. B. 6):

$$BE : BN = BN : NE;$$

folgl. u. s. w.

Lehrsatz.

§. 181. Wenn man die Seiten der fünf regulären Polyeder = 1 macht, so wird man den

Halbm. einer umschr. Kugel haben,

um den Tetraeder $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$,
" " Cubus $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$,
" " Octaeder $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$,
" " Dodecaeder $= \frac{1}{4}\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)$,
" " Icosaeder $= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}$.

Beweis. Das Quadrat des Durchm. der um die zwischen vier gleichseitigen Tr. enthaltene Pyram. beschr. Kugel, ist (13. B. 13) gleich ein und ein halbmal das Quadrat der Pyramidenseite, d. h., wenn man die Seite = 1 macht, so ist der Durchm. $= \sqrt{\frac{3}{2}}$; daher der Halbm. $= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Das Quadrat des Durchm. der um den Cubus beschr. Kugel, ist gleich (15. B. 13) dreimal dem Qdrt. der Pyramidenseite, d. h., der Durchm. $= \sqrt{3}$: daher der Halbm. $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Das Quadrat des Durchm. der um das Octaeder (einen von 8 congruenten gleichs. Tr. gebildeten regulären Körper) beschriebene Kugel ist (14. B. 13). Das Doppelte des Quadrats der Seite eines dieser Tr., d. h., der Durchm. ist $= \sqrt{2}$; daher der Halbmesser $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Die um den Dodecaeder (einen von zwölf congruenten reg. Fünfseiten gebildeten regulären Körper) beschr. Kugel ist auch (17. B. 13) um einen Cubus beschr., welcher zur Seite eine Diagonale dieser Fünfseite hat. Wenn man aber (Fig. 64) die Seite AB $= 1$ macht, so ist die Diagonale BN des Fünfseits

ABLMN $= \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$; in der That, ist

BN $=$ bE $=$ Ab $+$ AE $= \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)+1$ (§. 180)

$= \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$:

folglich BN oder die Diagonale eines Fünfseits, welches die Seite $= 1$ hat, ist gleich $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$. Wenn man nun über diese Linie einen Cubus bildet, so erhält man das Quadrat des Durchm. der ihm umschriebenen Kugel $= 3\,BN^2$, und der Durchm. $= \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) \cdot \sqrt{3}$: folgl. der Halbm. der Kugel, welcher den Dodecaeder umschließt $= \frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5}+1)$.

Wenn AB der Durchm. der Kugel ist, welcher den Icosaeder umfaßt (Fig. 92), u. wenn man, nachdem auf diesem Durchm. AC $= 4$CB genommen, und der Perpend. CD errichtet ist, welcher in D den Halbkr. ADB trifft, mit dem Halbm. DB einen Kreis, und in diesem Kr. ein reguläres Fünfseit beschreibt, so ist die Seite dieses Fünfseits (16. B. 13) die Seite des Icosaeders (ein aus zwanzig congruenten gleichseitigen Tr. gebildeter regulärer Körper); es verhält sich aber die Seite des Fünfseits zum Halbm.

des umschr. Kreises, wie Bb zu BA (Fig. 12) (§. 40); macht man nun AB = 1, so ist:

$$Ab = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1);$$

$$Ab^2 = \tfrac{1}{4}(6-2\sqrt{5}) = \tfrac{1}{2}(3-\sqrt{5});$$

$$Bb^2 = AB^2 + Ab^2 \text{ (47. B. 1)} = \frac{5-\sqrt{5}}{2};$$

es ist daher:

$$Bb : AB = \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)} : 1;$$

man hat aber:

$$\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)} : 1 = 1 : \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)}.$$

Nimmt man nun die Seite des Icosaeders = 1 an, so ist:

$$BD \text{ (Fig. 92)} = \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)}.$$

Es ist also:

$$AB^2 = 5BD^2 \text{ (16. B. 13)} = \frac{5+\sqrt{5}}{2};$$

$$\text{also } AB = \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)},$$

$$\text{und der Halbmesser} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}.$$

Aufgabe.

§. 182. Wenn die Seite AB der fünf regulären Körper (Fig. 93) gegeben ist, den

Halbmesser der verschiedenen Kugeln zu finden, welche sich um diese Körper beschreiben lassen.

Auflösung.

Aus dem Mittelp. A, mit AB, beschr. den Kr. BDd, und in seiner Peripherie sei

BC = CC = DE = Ed = AB gemacht;

es sei ferner Ba = Bα = Eα = Ea = BD; aus α, mit αa, sei der Bogen aP beschr.; aus demselben Mittelp. α, mit αB, sei der Bogen Bpqs beschr.; aus demselben Mittelp. α, mit AB, sei der Bg. grt beschr.; so wie auch aus α, mit BE, der Bg. MQRST; aus D, d, mit Aa, beschr. zwei Bogen, die sich in b schneiden: aus E, mit Ab, werde die Periph. in L geschnitten; macht

aP = MQ = AB;
MR = Aa;
MS = Eb;
und MT = BL;
endlich: Pp = aB;
und Qq = Ss = MB;
auch Rr = Tt = Mg; so ist

Bp	der Halbm. der umschriebenen Kugel von	dem Tetraeder,
Bq		= Cubus oder Hexaeder,
gr		= Octaeder,
Bs		= Dodecaeder,
gt		= Icosaeder.

Beweis. Macht man AB = 1, so ist:

$$\alpha a = 2\sqrt{2} \text{ (§. 100)},$$

$$\alpha B = \sqrt{3}, \text{ es ist also:}$$

$$\alpha a : \alpha B = aP : Bp \text{ (§. 93)};$$

d. h., $2\sqrt{2} : \sqrt{3} = 1 : Bp$; also ist:

$$Bp = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3}{2}};$$ daher u. s. w. (§. 181).

Auch ist (§. 93) : $\alpha M : \alpha B = MQ : Bq$;

d. h. $2 : \sqrt{3} = 1 : Bq$;

daher $Bq = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$.

Eben so ist $\alpha M : \alpha g = MR : gr$:

d. h., $2 : 1 = \sqrt{2} : gr$;

daher $gr = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$;

gleichfalls ist $\alpha M : \alpha B = MS : Bs$.

Aber $MS = bE = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ (§. 181);

folglich $2 : \sqrt{3} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1) : Bs$;

daher $Bs = \tfrac{1}{4}\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5}+1)$.

Endlich ist: $\alpha M : \alpha g = MT : gt$;

aber $MT = BL$.

Ferner: $BL^2 = BE^2 - EL^2$

(31. B. 3., 47. B. 1), d. h.

$$BL^2 = BE^2 - Ab^2 = 4 - \tfrac{1}{2}(3-\sqrt{5}) \text{ (§. 181)}$$

$$= \frac{5+\sqrt{5}}{2};$$

woraus $BL = MT = \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}$;

und

und folglich: $2 : 1 = \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)} : gt$:

daher $gt = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}$.

Es sind daher die Entfern. Bp, Bq, gr, Bs, gt die respectiven Halbm. der um die fünf regulären Körper beschr. Kugeln.

Aufgabe.

§. 183. Wenn der Halbmesser AB der Kugel gegeben ist, in welche die fünf regulären Körper eingeschrieben sind, ihre Seiten zu finden (Fig. 94).

Auflösung.

Aus A, mit AB, sei der größte Kugelkr. BDd beschr., und in seiner Peripherie sei:

BC = CD = DE = Ed = AB genommen;
ferner Ba = Ea = BD,
und Db = db = Aa;
es sei ferner in der Peripherie:
aH = AB, und EF = Hh = Aa;
aus a, mit aE, sei der Bogen ESQP beschr.; aus demselben Mittelp. a, mit ah, sei der Bogen hT beschr.; EP = Aa, und EQ = AB;
ES = Ab, und hF = bT gemacht.
Es sei ferner Pp=Qq=Ss=EL, und Tt=hL:

so ist:

Lp die Seite des Tetraeders,
Lq " " " Cubus,
Aa " " " Octaeders,
Ls " " " Dodecaeders,
Lt " " " Icosaeders.

Beweis. Der Bogen Eh ist gleich $\frac{1}{5}$ der Peripherie (§. 30); daher $ah = V5$ (§. 185); und da der rechte W. bAF derselbe als BAF ist, weil der P. b auf der Linie AE ist (§. 13, 27); so ist bF die Seite des Fünfseits (§. 40), und Ab die Seite des Zehnseits, in den Kreis BCd (§. 41). Macht man nun $AB = 1$, so ist:

$$Ab = \tfrac{1}{2}(V5 - 1) \text{ (§. 180);}$$

und $$bB^2 = AF^2 + Ab^2 = 1 + \tfrac{1}{4}(6 - 2V5)$$
$$= \frac{5 - V5}{2};$$

daher $$bF = hT = \sqrt{\left(\frac{5 - V5}{2}\right)}.$$

Es ist also: $aE : aL = EP : Lp$ (§. 93),
d. h., $V3 : 2 = V2 = Lp$;
demnach ist: $Lp = 2V\frac{2}{3}$.

Aber es verhält sich der Halbm. der Kugel zur Seite des Tetraeders, wie

$$\tfrac{1}{2}V\tfrac{3}{2} : 1 \text{ (§. 181)} = 1 : 2V\tfrac{2}{3}:$$

setzt man nun den Halbm. AB der Kugel $= 1$, so ist Lp die Seite des darin enthaltenen Tetraeders.

Auch hat man (§. 93) aE : aL = EQ : Lq,

d. h., $\sqrt{3} : 2 = 1 : Lq$;

woraus: $Lp = 2\sqrt{\frac{1}{3}}$;

es ist aber das Verhältniß des Halbm. der Kugel zur Seite des eingeschriebenen Cubus:

$\frac{1}{2}\sqrt{3} : 1$ (§. 181) $= 1 : 2\sqrt{\frac{1}{3}}$;

folglich u. s. w.

Auf gleiche Weise ist $Aa = \sqrt{2}$ als Seite des Octaeders; denn das Verhältniß des Halbm. der Kugel zur Seite des eingeschr. Octaeders ist:

$\frac{1}{2}\sqrt{2} : 1$ (§. 181) $= 1 : \sqrt{2}$;

folglich u. s. w.

Desgleichen aE : aL = ES : Ls,

d. h., $\sqrt{3} : 2 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) : Ls$;

daher ist $Ls = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{3}}$.

Das Verhältniß des Halbm. der Kugel zur Seite des eingeschr. Dodecaeders ist aber:

$\frac{1}{4}\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} + 1) : 1$ (§. 181) $= 1 : \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{3}}$;

folglich u. s. w.

Endlich hat man: ah : aL = hT : Lt (§. 93),

d. h., $\sqrt{5} : 2 = \sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{10}\right)} : Lt$:

Aber das Verhältniß des Halbm. der Kugel zur Seite des eingeschr. Icosaeders ist:

$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)} : 1 \text{ (§. 181)} = 1 : 2\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)}.$

Folglich, u. s. w.

Aufgabe.

§. 184. In der Peripherie eines gegebenen Kreises (Fig. 95) ist der Punkt B gegeben, man soll zwei andere Punkte L und M finden, so daß BLM ein gleichseitiger Triangel, und den Kreis mit der Seite LM in deren Mitte E berührt.

Auflösung.

In der Peripherie des gegebenen Kr., nehmet BC = CD = DE = Ed = seinen Halbm. AB; u. Ba = Ea = BD.

Aus dem Mittelp. a, mit dem Halbm. aA, sei ein Bogen beschr., welcher durch α geht; aus E, mit EA, sei ein Bogen beschr., welcher den vorhergehenden in α trifft; aus α, mit demselben Halbm. αE, werde die Periph. in P geschnitten. Ferner: aus E, mit EP, sei ein Bog. beschr., welcher durch L und M geht; aus D, d mit aP, seien zwei Bogen beschr., welche den vorhergehenden in L, M schneiden; so sind L u. M die gesuchten Punkte.

Beweis. Vergleicht man die P. a, A, E, α, P

der 95sten Figur, mit den P. Q, A, p, B, P der dritten Figur, so zieht man aus der Gleichung:

$$AQ^2 = Ap^2 + pQ^2 - pP \cdot pQ,$$

welche zu der dritten Fig. gehört, für die 95. Fig., hier folgende Gleichung:

$$Aa^2 = AE^2 + Ea^2 - EP \cdot Ea;$$

und setzt man nun dafür die Zahlenwerthe (§. 27):

$$2 = 1 + 3 - EP \cdot \sqrt{3},$$

so ist: $2 = EP\sqrt{3}$,

und $EP = \frac{2}{3}\sqrt{3}$:

und da die drei P. E, P, a in derselben geraden Linie sind (§. 13), so hat man:

$$Pa = Ea - EP = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Denkt man sich die Linie BE gezogen, welche die L. Dd in R schneidet, so ist (§. 104):

$$BR = \frac{2}{3};\quad RD = \frac{1}{2}\sqrt{3};\quad BE = 2;$$

daher ist die vierte Proportionale zu den drei Linien

$$BR, RD, BE \text{ gleich } \frac{2}{3}\sqrt{3} = EM;$$

es ist also (§. 104):

$$RE = \frac{1}{2},\quad BD = \sqrt{3} \text{ (§. 2)};$$

daher die vierte Proportionale zu den drei Linien

$$BR, BD, RE \text{ gleich } \frac{1}{3}\sqrt{3} = DM$$

ist; die Linien EM, DM haben also die nöthige Länge, damit der Tr. BEM ähnlich dem Tr. BRD (S. 2. B. 6) werde; sie sind auch wirklich ähnlich; denn der Punkt M kann an keinem andern Orte liegen (S. 8. Buch 1).

Eben so beweist man, daß der Tr. BRd ähnlich dem Tr. BEL ist; woraus man sieht, daß der Tr. BDd ähnlich dem Tr. BML (20. B. 6); folglich ist auch dieser letzte gleichseitig. Es sind ferner, die W. BEM, BEL gleich den W. BRD, BRd, also rechte W., und die Linien EN, EL gleich; folgl. BLM der gesuchte Triangel.

Aufgabe.

§. 185. In einem Kreis, dessen Halbmesser AB gegeben ist (Fig. 96), fünf gleiche Quadrate zu beschreiben, von denen das eine dem Kreise concentrisch ist, und die übrigen ihn berühren, indem jedes eine gemeinschaftliche Seite mit dem mittleren Quadrate hat.

Auflösung.

Die Sehnen BC, CD, DE machet gleich dem Halbm. AB, ferner

$$Ba = Ea = BD;$$

dann die Sehnen BF, $Bf = Aa$: aus a, mit dem Halbm. AB, schneidet den Kreis in G, und machet die Sehne $Gg = Aa$; aus g, mit ga, beschr. einen Bogen aP, und machet seine Sehne $aP = aA$; aus demselben Mittelp. g, mit gA, beschreibet einen Bog. Ap in der Richtung des Bg. aP; machet $Pp = Aa$;

dann machet die Sehnen Bq, fn, Em, Fl = Ap; mit demselben Halbm. Ap, aus den Mittelp. B, q, f, n, E, m, F, l, beschr. Bogen, welche sich im Kr. in L, Q, N, M schneiden; so ist LMNQ das Central-Quadrat, und BLQq, fQNn, ENMm, FMLl sind die andern gesuchten Quadrate.

Beweis. Wenn man die P. a, A, G, B, g dieser Fig. mit den P. Q, p, A, R, S der 4ten Fig. vergleicht, so hat man (§. 21) für Figur 87 die Gleichung:

$$ag^2 = aB^2 + Gg \cdot Aa,$$

d. h., wenn man den Halbm. AB = 1 macht:

$$ag^2 = 3 + 2 = 5 \text{ (§. 27)};$$

daher $ag = \sqrt{5}$.

Ferner ist $aP = aA = \sqrt{2}$.

Es ist aber $ga : aP = gA : Ap$ (§. 93),

d. h., $\sqrt{5} : \sqrt{2} = 1 : Ap$;

$$\text{daher } Ap = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = EM;$$

und da BCDE ein Halbkr. ist (§. 64), so ist BmE ein rechter W. (31. B. 3); hieraus:

$$BE^2 = Bm^2 + mE^2;$$

$$\text{d. h. } 4 = Bm^2 + \tfrac{2}{5};$$

$$\text{folglich } Bm^2 = 9 \cdot \tfrac{2}{5},$$

$$\text{und } Bm = 3\sqrt{\tfrac{2}{5}} = 3\,mE.$$

Denselben Werth findet man für qE, und beweist, daß alle andere W. des Vierseits BmEq, welche ein-

geschrieben und auf einem Durchm. ruhen, rechte W. sind: folglich ist dieß Vierseit ein Rectangel.

Auf gleiche Weise bew. man, daß Flfn ein Rectangel ist.

Macht man die Sehne $Em = k$, so ist mF die Sehne des Complements zum rechten W. $= h$, (§. 159), und es ist

$$h^2 = 2 - 2k\sqrt{(1 - \tfrac{1}{4}k^2)};$$

woraus, wegen

$k^2 = \frac{2}{5}$, folgt, daß:

$$h^2 = 2 = 2k\sqrt{\tfrac{9}{10}} = 2 - 2\sqrt{\tfrac{9}{25}} = 2 - \tfrac{6}{5}$$
$$= \tfrac{4}{5} = 2k^2,$$

d. h., $Fm^2 = FM^2 + Mm^2$;

daher W. FMm $= R$. (48. B. 1), so wie auch die andern W. BLl, fQq, ENn. Ferner, wenn x die Entf. des P. m von dem, wo der aus F auf Bm gefällte Perpd. die Bm trifft, so ist (13. B. 2):

$$BF^2 = Fm^2 + Bm^2 - 2Bm \cdot x,$$

d. h., $2 = \frac{4}{5} + \frac{18}{5} - 6x \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}$;

daher $x \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}$,

und dividirt mit $\sqrt{\frac{2}{5}}$, giebt

$$x = \sqrt{\tfrac{2}{5}} = mM.$$

Wenn nun ferner y der Perpend. ist, welcher von F auf Bm fällt, so hat man:

$$y^2 = Fm^2 - x^2 = \tfrac{4}{5} - \tfrac{2}{5} = \tfrac{2}{5};$$

u. also $y = \sqrt{\frac{2}{5}} = FM$.

Man beweist hierdurch, daß die P. M, L in der Linie Bm sind, und da;

$$Bm = 3Em = Mm + BL + Em;$$

so ist auch: $LM = Em$.

Ferner beweist man, daß die andern Seiten MN, NQ, LQ denselben Werth haben. Aus allem, was vorhergehet, folgt, daß die äußern W. des Vierseits LMNQ, dessen Spitzen sich in L, M, N, Q befinden, rechte W. sind, die innern W. sind es also auch; folglich hat man die fünf verlangten Quadrate.

Aufgabe.

§. 186. Wenn die fünf Winkelspitzen A, B, C, D, E, (Fig. 97) eines regulären Fünfseits gegeben sind, die fünf Punkte a, b, c, d, e zu finden, in welchen sich die Diagonalen dieses Fünfseits schneiden.

Auflösung.

Aus A, B, C, D, E, mit der Seite AB des Fünfseits, beschr. man Bogen, die sich in a, b, c, d, e schneiden, so sind diese P. die Durchschnittsp. der Diagonalen.

Beweis. Denkt man sich die Diagonalen u. die Seiten des Fünfseits ABCDE gezogen, so ist:

W. BAC = BDA (29. B. 3) = CAD:

woraus Ab = bD (6. B. 1).

Es ist nachgehends:

BbA = bDA + bAD (32. B. 1) = BAb + bAD
= BAD = ABD (5. B. 1);

der Tr. ABb ist also gleichsch. (6. B. 1) d. h. es ist:

AB = Ab = bD;

folglich, u. s. w.

Aufgabe.

§. 187. In einem Kreise, dessen gegebener Halbmesser AB ist (Fig. 98), sechs reguläre Fünfseite zu beschreiben.

Auflösung.

In der Peripherie des gegebenen Kreises mache

BC = CD = DE = Ed = AB;

so wie Ba = Ea = BD,

und BF = Db = db = Aa;

auch sei in derselben Peripherie

BP = PQ = QR = RS = bF;

mit demselben Halbm. bF, aus B, P, Q, R, S, beschreibe man Bogen, welche sich in β, p, q, r, s schneiden. Nun beschr. man aus β, P, mit βp zwei Bogen, die sich in c schneiden; mit dems. Halbm., aus P, p beschr. 2 Bg., die sich in d schneiden; so hat man zwei von den gesuchten Fünfs., nämlich: βpqrs das seinen Mittelp. in A hat, und βpdPc, welches den ge-

gebenen Kreis in P berührt. Man wird auf dieselbe Weise die Winkelspitzen der vier andern Fünfseite pqfQe, qrhRg, rskSi, sβmBl finden.

Beweis. Die P. B, P, Q, R, S sind die Winkelspitzen eines im gegebenen Kr. beschr. regulären Fünfseits (§. 40. 128); daher liegen die P. β, p in der Diagonale BQ, und die P. p, q in der Diagonale PR (§. 186); und da Bp = βQ, so ist auch Bβ = pQ. Eben so beweist man, daß Pp = qR und da BQ = PR (27. B. 3), so ist auch Bβ = Pp: und βp = pq. Auf gleiche Weise beweist man auch, daß alle Seiten des Fünfseits βpqrs unter sich gleich sind. Ferner, ist W. βpq, d. h.,

$$BpR = BPR + PBp \text{ (32. B. 1)};$$

aber PBp, d. h.,

$$PBQ = QPR:$$

mithin: $\beta pq = BPQ$.

Eben so beweist man, daß die andern W. des Fünfseits βpqrs gleich den W. des Fünfseits BPQRS: folgl. sind beide regulär. Ueberdem ist der durch zwei Diagonalen des Fünfseits BPQRS gebildete W. QBR, welches der W. βBs ist, = den durch die beiden Diag. des Fünfseits βpqrs gebildeten W. βqs (20. B. 6). Da nun die Tr. βBs. βqs gleichschenkl. sind, so sind auch ihre W. an der gemeinschaftlichen Grundl. βs unter sich gleich (5. 32. B. 1); mithin sind auch die Tr. congruent (26. B. 1); und da in

den Tr. Bmβ, βpq die Seiten unter sich gleich, es auch die Winkel sind (8. Buch 1), wie auch die Tr. Bls, srq: so sind folgl. alle Seiten und W. des Fünfseits Bmβsl gleich den Seiten und W. des Fünfseits βpqrs; sie sind daher beide regulär. Man beweist dasselbe für die andern Fünfseite βcPdp, peQfq, qgRhr, riSks; folglich u. s. w.

§. 188. Der P. b ist der Mittelp. des Fünfseits βmBls, und die Entf. bB der Halbm. des um dieses Fünfseit und um die andern ihm gl. umschriebenen Kreises, wie wir es sogleich beweisen werden; hierdurch wird auch eine schöne Eigensch. zu dem P. b hinzugefügt, den wir schon oft in dieser Geometrie bemerkt haben. Denn, außer den Theilungen im mittleren und äußeren Verhältniß, die wir durch ihn in dem Durchm. BAE (§. 45, 46) erhalten haben; außer daß er uns dazu gedient hat, in dem Kreise, dessen Halbm. AB die Seite bF des eingeschr. Fünfseits (§. 40) die Seite bA des in denselben Kreis eingeschr. Zehnseits (§. 41) zu bestimmen; hat man noch den Halbm. Bb des Kr., der um die sechs Fünfseite die man, wie in der jetzigen Aufgabe, in dem größten mit AB beschr. Kreis einschreiben kann, denn wenn man den Halbm. AB = 1 setzt, so ist:

$$Ab = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \text{ (§. 180)};$$

und da (31. B. 3)

$$BE^2 = BQ^2 + QE^2 = BQ^2 + Ab^2;$$

so ist auch $BQ = \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}$.

Nachgehends hat man:

$$\beta Q = BP = bF = \sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)} \text{ (§. 181):}$$

woraus:

$$CQ : \beta Q = BQ \cdot \beta Q : \beta Q^2 = \sqrt{5} : \frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

$$= 1 : \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\ BA : bA:$$

daher $BQ : BQ - \beta Q = BA : BA - bA$,

d. h., $BQ \cdot B\beta = BA : Bb$.

Folglich verhalten sich die beiden Diagonalen der Fünfseite BPQRS, Bmαsl unter sich, wie BA : bA: folgl., da BA der Halbm. des ersten Fünfseits ist, so wird Bb der Halbm. des zweiten sein (20. B. 6).

Aufgabe.

§. 189. Sind die Winkelspitzen eines regulären Sechsseits BCDEdc (Fig. 99) gegeben, die Punkte l, m, n, g, p, q zu finden, wo sich die nicht durch den Mittelpunkt gehenden Diagonalen schneiden.

Auflösung.

Macht $Ba = Ea = BD$;

ferner: $BA = CA = B\alpha = BC$;

$$a\alpha = aA, \text{ so wie}$$
$$\alpha P = AP = \alpha B.$$

Nun beschreibe aus B, C, mit aP, zwei Bogen, die sich in l schneiden; aus C, D, beschreibe zwei andere Bogen, die sich in m schneiden, u. s. f.; diese P. l, m u. s. w., sind die gesuchten Punkte.

Beweis. Angenommen, die angezeigten Diag. schneiden sich in l, m, n, g, p, q, da der

$$\text{W. } BDc = DcE \text{ (29. B. 3)},$$

so ist BD prll. zu cE (28. B. 1): daher der Tr. Clm ähnl. dem Tr. CcE (2, 5. B. 6), und folgl. gleichseitig. Eben so ist der Tr. Blq ähnl. dem Tr. BDd, ferner, da die Tr. CcE u. BdD gleiche Seiten haben, so sind sie gleich (§. 2) (8, 4. B. 1), und da die Seite BD, und folgl. lm von der Seite cE eben so weit entfernt sind, als die Seite Cc, so wie ql von der Seite dD (14. B. 3), so wird, wenn man den Tr. BdD über den Tr. CcE bringt, ql auf lm fallen, und beide sich decken; aber Bl = lq; mithin Bl = lm. Eben so beweist man, daß Dm = ml. Folgl. ist, wenn man den Halbm. des Kr.

$$BC = AB = 1 \text{ (§. 2) macht:}$$
$$Bl = \tfrac{1}{3}BD = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Gleichfalls ist $Cl = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Wir haben aber genau:

$$Bl = Cl = aP = \tfrac{1}{3}\sqrt{3} \text{ (§. 184) gemacht;}$$

folglich ist l einer der gesuchten P. Dasselbe beweist man auch für die andern P. m, n, g, p, q; folglich, u. s. w.

Aufgabe.

§. 190. In einem Kreise vom gegebenen Halbmesser AB (Fig. 100), sechs reguläre Sechsseite zu beschreiben, wovon eines dem Kreise concentrisch, und die andern um das erste herumgestellt sind.

Auflösung.

In der Peripherie des gegebenen Kr. machet

$$BC = CD = DE = Ed = AB;$$

ferner $DV = dV = DB$.

Aus C, A, mit CV, beschr. zwei Bog., welche sich in P schneiden; aus P, mit demselben Halbm. PC, schneidet die Peripherie des Kr. in δ; so ist $d\delta$ die Seite der in den Kreis zu constr. Sechsseite, und die man leicht eins neben das andere einschreiben wird. Dann beschreibe man aus d, δ, mit derselben Seite $d\delta$, zwei Bogen, die sich in α schneiden; aus α, mit demselben Halbm., sei ein Kreis beschrieben, in welchen man ein regul. Sechsseits $d\delta mnpq$ beschreibt 15. B. 4). Aus A, mit demselben Halbm., werde ein Kreis beschrieben, welcher durch np geht.

In diesem Kreis beschr. das Sechsseit, welches die Linie pn zu einer seiner Seiten hat. Ueber die Seiten dieses Sechsseits zeichne man die andern Sechsseite, so wie es zuerst auf der Seite dδ geschehen, so hat man die sieben verlangten Sechsseite.

Beweis. Macht man zur Abkürzung AB = 1, so wird

$$CP = CV = \sqrt{7} \text{ (§. 100)} = AP:$$

alsdann ist:

$$AP : A\delta = A\delta : \delta d \text{ (§. 86)}$$

d. h., $\sqrt{7} : 1 = 1 : \delta d$;

woraus: $\delta d = \sqrt{\frac{1}{7}}$.

Wir wollen uns denken, die gesuchten Sechsseite wären in den Kreis beschrieben, und dδ ihre Seite, welches die unbekannte Größe = x ist; diese Linie halbire man in v, und zieht die ihr perpd. (§. 83) Av, die durch den Mittelp. α des Sechsseits geht, dessen Seite dδ ist: auch halbirt man in μ, die Seite pn des centralen Sechsseite, u. da in dem gleichs. Tr. Apn:

$$pn : A\mu = 1 : \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \text{ (§. 104)};$$

so ist $x : A\mu = 1 : \frac{1}{2}\sqrt{3}$;

woraus: $A\mu = \frac{1}{2}x\sqrt{3}$.

und $Av = 3A\mu = \frac{3}{2}x\sqrt{3}$,

und auch $dv = \frac{1}{2}x$;

ferner, da $1 = Ad^2 = Av^2 + dv^2$;

so ist: $1 = \frac{27}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^2 = 7x^2$;

woraus $x^2 = \frac{1}{7}$ und $x = \sqrt{\frac{1}{7}}$,

ein

ein Werth, der, wie so eben bewiesen, genau derselbe ist der in der Aufl. der Aufg. für d^2 bestimmt, folglich u. s. w.

Man findet in Pappus, B. 8, Aufg. 15, Satz 19, diese Aufgabe mit dem Lineal und Zirkel gelöst, auf eine Art, die nicht einfacher, als die vorhergehende ist. Man findet auch eine mechanische Constr. beigefügt.

§. 191. Wir glauben bis hieher die Versprechungen erfüllt zu haben, welche wir (§. 6, 7) gemacht haben. Was den ersten Punkt betrifft, so haben wir schon alle Elemente der Geometrie des Zirkels gegeben, d. h., die Gesammtheit der Aufgaben, welche hinreichen, um mit dem Zirkel allein und ohne das Lineal alle die P. zu finden, die man mit diesen zwei Instrumenten vereinigt finden kann. Um dieß zu bew. (§. 71), bemerkt man zuerst, daß die Elementar-Geom. das Mittel angiebt, die P. einer Aufg. zu finden, entweder durch das Schneiden der Bog., unter sich (und dieß Mittel ist der Geom. des Zirkels eigen), oder durch das Schneiden von Bog. u. geraden Linien unter sich (u. alles dieß ist im 7. B. enthalten) (§. 110 u. f.). Nachgehends findet sich eine für die Aufl. einer Aufg. nöthige gerade Linie, der Größe und Lage nach bestimmt. Was die Größe betrifft, so haben wir im 3ten Buche gelehrt (§. 64 u. f.), und im 4ten Buche (§. 72 bis 74), irgend eine

endliche Größe zu vergrößern, zu verringern, oder sie in eine beliebige Anzahl Theile zu theilen; ferner, im 5ten Buche (§. 86 und folgende), die dritten, vierten und mittleren Proportionalen zu finden, so wie auch eine gr. L. nach einem beliebig gegebenen Verhältniß zu theilen. Was die Lage der gr. L. betrifft, so bestimmt sie sich für jede von ihnen durch die Lage zweier Punkte; das 4te Buch lehrt nun (§. 76 und folg.), für alle Fälle die Punkte der Perpendikel und der Parallelen zu finden. Das 8te Buch (§. 113 u. folg.) giebt alles, was nothwendig ist, um die Lage der geraden Linien unter sich, unter irgend einem durch zwei Punkte gegebenen Winkel, zu bestimmen.

In dem zweiten Buche (§. 27 und folg.) sind die Theilungen der Kreisperipherie und alle zum Ressort der Elementar-Geometrie gehörigen Bogen erschöpft. Nach allen diesem weiß ich nicht, welche andere Elemente man noch verlangen könnte.

Hinsichts der Wahl der hier gesammelten Aufgaben überlassen wir den Mathematikern die Sorge, zu beurtheilen, ob, bei einer großen Anzahl nützlicher oder unterhaltender Fälle, es nicht vorzuziehen ist, nicht allein für die Genauigkeit des Resultats, sondern auch für die Schnelligkeit der Construction, das Lineal nicht anzuwenden, und sich des

Zirkels allein zu bedienen, bis man die für die Aufgaben nöthigen Punkte gefunden hat, und alsdann, wenn es sein muß, von einem Punkte zum andern eine oder mehrere gerade Linien zieht, welche man in der That mit dem Zirkel allein nicht ziehen kann, und welche den Gebrauch des Lineals erfordern. —

Zwölftes Buch.

Aufgaben, durch Annäherung aufgelöst.

§. 192. Alle Aufgaben, die den zweiten Grad übersteigen, können geometrisch nicht bloß mit dem Lineal und dem Zirkel aufgelöst werden, sondern sie erfordern noch Durchschnitte von conischen oder von Kurven höhern Grades, und folglich kann man sie nicht genau mit der Geometrie des Zirkels allein lösen. Die zur Construction der Cicloide, der Conchoide, der Cissoide, der Trajectorie und anderer ähnlichen Kurven erfundene Instrumente, welche zur Aufl. dieser Aufg. dienen, sind sicherlich von einer sehr geistreichen Erfindung, einem schnellen und zierlichen Gebrauch in der Praxis.

Wenn man indeß nicht den ganzen Zug der Kurve nöthig hat, wozu diese Instrumente bestimmt sind, und es hinreicht, einen Punkt durch das Schneiden dieser Kurve mit andern Linien zu erhalten, da sie immer einigen Verdacht kleiner Fehler zulassen, welche

man oft nicht gut berechnen kann, so ist es in vielen Fällen besser, der theoretischen Genauigkeit dieser Methoden die hinreichende praktische Annäherung einer Construction mit dem Lineal und dem Zirkel vorzuziehen. Unter solchen Umständen ist alsdann sehr oft eine mit dem Zirkel allein erhaltene Aufl. noch vorzuziehen. Man wird sich durch Beispiele davon überzeugen können, wenn man unsere Aufl. mit den schon bekannten vergleicht.

§. 193. Da es noch keine allgemeine Methode giebt, durch die Elementar-Geometrie diese Annäherungen zu erhalten, so muß man nicht erwarten, daß ich dergleichen durch meine Geometrie des Zirkels vorschlage. Ich nenne geometrische Annäherungs-Methode nicht diejenige, durch welche man einen angenäherten Werth mit Hülfe eines von den sogenannten geom. Maßstäben erhält, weil vor deren Gebrauch eine arithmetische Rechnung vorhergehen muß: eine solche Methode muß vielmehr eine arithmetische genannt werden. Gesetzt, z. B.: man wollte die Kubikwurzel aus der Zahl 2 haben, so wird die Ausziehung, welche man arithmetisch von dieser Wurzel machen will, um dann die Decimal-Theile oder irgend ein Bruch auf einem geometrischen Maßstabe mit dem Zirkel abzunehmen, um einen Kubus zu verdoppeln, durch ein Mittel geschehen, welches eher zur Arithm. als zur Geometrie gehört.

§. 194. Ich habe bis jetzt noch kein anderes Mittel wahrnehmen können, um auf eine sehr annähernde Weise die Auflösung von mehreren nützlichen den zweiten Grad übersteigenden Aufg. zu erhalten, als Gattungen, und so zu sagen, verschiedene Klassen von Constructionen der Elementar-Figuren zu finden; alsdann die größt mögliche Anzahl einzelner fast unzählbaren Fälle, die daraus hervorgehen, der Rechnung zu unterziehen, unter diesen diejenigen auszuwählen, welche am besten zu dem vorgesetzten Zweck führen, u. sie zur Aufl. der Aufg. anwenden.

§. 195. Ich habe schon mehrere von diesen Gattungen, und so zu sagen von diesen Klassen von Constr. untersucht, und ich habe über diese Materie Untersuchungen in Händen. Die einfachste Klasse ist diejenige, von welcher in diesem letzten Buche unserer Geometr. fast gänzlich allein Gebrauch gemacht wird. Sie beruhet auf die drei merkwürdigen P. a, b u. c (Fig. 9, 11 u. 12) (§. 59), die uns schon so oft in den vorhergehenden Büchern gedient haben, und über welche wir die (§. 59) versprochenen zwölf Gleich. zu geben haben.

§. 196. Es sei Z irgend ein Punkt, auf dem vierten Theil der Peripherie BF in der 12ten Fig. constr. wie im zweiten Buche, und in dem andern Vietel Bf sei der P. z so genommen, daß Bz=BZ; dann ist (§. 20 u. 21):

$$[A] \ldots aZ^2 = aB^2 - Zz \,.\, Aa,$$
$$[B] \ldots bZ^2 = bB^2 - Zz \,.\, Ab,$$
$$[E] \ldots (eZ)^2 = eB^2 - Zz \,.\, Ae.$$

§. 197. Will man die Gleichungen für die Entf. der drei P. a, b, e von z haben, so braucht man nur die Zeichen der zweiten Hälfte in den vorhergehenden Gleichungen zu verändern, alsdann ist (§. 20. und 21):

$$[A'] \ldots az^2 = aB^2 + zZ \,.\, Aa,$$
$$[B'] \ldots bz^2 = bB^2 - zZ \,.\, Ab,$$
$$[E] \ldots ez^2 = eB^2 + zZ \,.\, Ae.$$

§. 198. Da Zz die Sehne des doppelten Bog. von $BZ = 2 \sin. BZ$ ist, und setzt man $AB = 1$, was wir immer voraussetzen, so ist:

$$aB^2 = BD^2 = 3 \text{ (§. 2)};$$
$$Aa^2 = 2 \text{ (§. 27)};$$
$$Bb^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \text{ (§. 181)};$$
$$Ae^2 = 2 - \sqrt{2} \text{ (§. 38)};$$

woraus: $eB^2 = AB^2 + Ae^2 = 3 - \sqrt{2}$;

und $Ab = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ (§. 180):

wenn man $aZ = a$ macht, so ist:

$$(A') \ldots a^2 = 3 = 2 \sin. A \,.\, \sqrt{2}.$$

Diese Gleichung umfaßt auch den Fall, wo der Bog. A negativ wie Bz ist, in welchem das Zeichen — vor $2 \sin. A \sqrt{2}$ sich in + verwandelt.

§. 199. Der Werth von a kann immer der von irgend einer Sehne des Kr. BDd sein, ausgenommen in dem Falle, wo der durch a ausgedruckte Werth von der Entf. az größer als 2 ist. Um dann den Werth von a leichter zu berechnen. Da

$$V2 = BF = 2 \sin. 45°$$

u. $2 \sin. A . \sin. 45° = \cos. (A - 45°) - \cos. (A + 45°)$

$$= \cos. (45° - A) - \sin. (45° - A) \text{ (§. 159)}$$

so ist:

[*] $a^2 = 3 - 2 \cos. (45° - A) + 2 \sin. (45° - A)$.

§. 200. In den andern Fällen, wo a kleiner als 2 ist, und A' den Bog. nennt, dessen Sehne a ist, so hat man:

$$\frac{a^2}{4} = \sin.^2 . \tfrac{1}{2} A' = \frac{1 - \cos. A'}{2} \text{ (§. 155)}$$

$$= \tfrac{3}{4} - \sin. A \, V\tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{4} - \sin. A \cos. 45°;$$

woraus, wenn man reducirt:

$$\cos. A' = 2 \sin. A \cos. 45° - \tfrac{1}{2};$$

hieraus noch (§. 159),

$\cos. A' = \sin. (A + 45°) + \sin. (A - 45°) - \sin. 30°$,

oder auch:

[1] $\cos. A' = \cos. (45° - A) - \sin. (45° - A) - \sin. 30°$.

§. 201. Will man sich dieser Gleichung bedienen, um eine Theilung der Peripherie zu erhalten, die man nicht genau haben kann, so führt man statt A einen genauen Bogen ein, z. B. den 20sten Theil

der Peripherie = 18°, indem man BZ = 18° macht (Fig. 12), und es ist dann:

$$\cos. A' = \cos. 27° - \sin. 27° - \sin. 30°.$$

Also $\sin. 27° = 0{,}4539905$

$\sin. 30° = 0{,}5000000$

$0{,}9539905$

$\cos. 27° = 0{,}8910065$

daher $\cos. A' = -0{,}0629840$.

Man findet alsdann in den Tafeln:

$$0{,}0629840 = \sin. 3° 36' \tfrac{1}{2}\tfrac{9}{9}\tfrac{2}{0}\tfrac{3}{3}\tfrac{5}{3}.$$

Da nun der Werth von $\frac{1}{2}\frac{9}{9}\frac{2}{0}\frac{3}{3}\frac{5}{3}$ sich $\frac{2}{3}$ so nähert, daß es nicht einmal ein Fehler von einer ganzen Einheit in der letzten Ziffer der Zahl 1925 ist; so kann man 0,0629840 für den Sinus von 3° 36′ 40″ nehmen, ohne daß man mit den gewöhnlichen Tafeln erkennen kann, ob der Fehler eine Tertie beträgt. Folglich ist der Bog. A′, dessen Cosinus negativ ist, auch

$$= 93° 36' 40'',$$

und da BZ gleich gesetzt wird 18°, so ist die Weite aZ die Sehne dieses Bogens. Trägt man also diese Weite aZ mit dem Zirkel als Sehne auf der Periph. so wird man einen Bogen = 93° 36′ 40″ mit einer hinreichenden Annäherung bestimmen.

§. 202. Um den Fehler aufzufinden, der sich in den Zahlen der gewöhnlichen Tafeln findet, bemerkt man, daß, da der sin. 18° gleich ist der halben Sehne vom zehnten Theil der Peripherie, d. h.

$= \frac{1}{2}Ab = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$,

und da der cos. von 45° gleich $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist, so wird die Gleichung

cos. $A' = 2$ sin. A cos. $45° - \frac{1}{2}$ (§. 200)

geben cos. $A' = \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{5}-1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{10}-\sqrt{2}) - \frac{1}{2}$

$= 0{,}0629839824.$

Berechnet man nun auch noch mit mehr Ziffern den Sinus von 3° 36′ 40″, so findet man 0,0629840611 54, und wenn man sich mit 8 Decimalstellen begnügt, so findet man

sin. 3° 36′ 39″ = 0,06297921;

der Unterschied für 1″ oder 60‴ ist 485;

wenn also 485, 60‴ giebt, so wird 8 geben $\frac{26}{97}$‴, und giebt folgl. nicht eine ganze Tertie. Der Bogen, welcher zur Sehne die Weite aZ hat, übertrifft also 93° 36′ 40″ noch um keine ganze Tertie.

§. 203. Hiernach könnte man von diesem Werthe für die alte Kreistheilung folgenden Gebrauch machen. Es ist klar, daß er dienen könnte in Kreisen, worin Minuten bemerkt wären, eine Minute in drei gleiche Theile zu theilen; denn man würde die 40″ finden, d. h., $\frac{2}{3}$′ zwischen einer Minute und der folgenden, und dieß ohne um eine Tertie zu fehlen. Man kann ihn auch noch anwenden, um den dritten Theil von einem Grade zu finden.

In der That, da der Bog. cBN = 90°, und Np = 3° (§. 31. 43), und man nimmt

$$BZ = Kp,$$

so ist Bog. BZ = 18° (§. 32);

aus c als Mittelp., mit dem Halbm. aZ, sei ein Bog. beschr., er wird die Peripherie zwischen p und P in einem Punkte schneiden, der von p um 36′40″ bis auf sehr weniges entf. ist. Es sei y dieser P., und z. B. den Bogen Ny = 3° 36′ 40″, so haben wir einen Bogen = 10° 50′, ohne daß dabei ein Fehler von drei Tertien statt fände, und wenn diese Verdreifachung des Bogens von N nach G geschiehet, so wird die letzte Theilung zwischen π und φ fallen. Es mag η der P. sein, wo sie hinfällt, so das

$$N\eta = 10° 50',$$

es sei nun μ die Mitte des Bogens πφ nach §. 58 erhalten, so ist der Bogen μη = 20′, ohne einen Fehler von 3 Tertien zuzulassen, d. h., man wird ein Drittel von einem Grade der alten Theilung mit einer solchen Genauigkeit erhalten, daß ich nicht glaube, man könne eine größere im Praktischen verlangen.

§. 204. Wir haben dieß Beispiel unter allen Werthen von cos. A genommen, die berechnet worden sind, indem man successive in der Gleichung [1] statt A die Bogen 90°, 88° 30′, 87°, u. s. w. bis 0°, dann −1° 30′, −3°, u. s. f., bis mit −19° 30′ setzt; über diesen Bogen hinaus, hat die Gleichung [1] nicht mehr statt, weil ihre Werthe größer als die Einheit werden.

§. 205. Wir wollen nun die Untersuchungen der andern Gleichungen fortsetzen.

Jede Entfernung des Punktes b von den P. der Peripherie, welche kleiner ist, als der Durchm. 2, kann die Sehne eines Bogens sein. Nennen wir B' den Bogen, der zur Sehne die Entfern. bZ hat, so wird $\frac{bZ}{2} = \sin.\frac{1}{2}B'$ sein; und ist B der Bogen BZ, so ist $Zz = 2\sin.B$; theilt man nun ferner durch 4 die Gleichung [B] aus §. 196, so ist:

$$\sin.\tfrac{1}{2}B' = \frac{1-\cos.B'}{2} \quad (\S.\ 155)$$

$$= \frac{5-\sqrt{5}}{8} - \sin.B\,\frac{\sqrt{5}-1}{4}:$$

woraus:

$$\cos.B' = 1 - \frac{5-\sqrt{5}}{4} - \sin.B\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$= 1 - 2\sin.^2 36° - 2\sin.B\sin.18°$$

$$= \cos.72° - \cos.(B-18°) + \cos.(B+18°)\ (\S.\ 155.158):$$

daher ist:

[2] $\cos.B' = \sin.18° + \cos.(B+18°) - \cos.(B-18°).$

§. 206. Wenn man ebenfalls E' den Bogen nennt, der zur Sehne die Entf. von eZ hat, und E der Bogen BZ, dann wird die Gleichung [E] aus §. 196 geben;

$$\sin.^2\tfrac{1}{2}E' = \frac{1-\cos.E'}{2} = \frac{3-\sqrt{2}}{4} - \sin.E\,\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2};$$

woraus sich ergiebt:

$$\cos. E' = \sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{2} + 2 \sin. E \frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2}$$

$$= \sin. 45° - \sin. 30° + 2 \sin. E \sin. 22° 30';$$

und endlich:

[3] $\cos. E' = \sin. 45° - \sin. 30°$

$+ \cos. (E 22° 30') - \cos. (E + 22° 30')$.

§. 207. Ist mittelst dieser drei Gleichungen ein Bog. A, B oder E gegeben, so wird man, mit den Tafeln der natürlichen Sinus und Cosinus, u. durch einfache Additionen oder Subtractionen, die Cosinus und die Bogen A', B' u. E' bekommen, die als Sehnen die Entfernungen aZ, bZ, eZ haben, welche man als einerlei mit dem doppelten Sinus von der Hälfte der Bogen A', B', E' finden wird.

§. 208. Umgekehrt, wenn die Entf. aZ gleich einer Sehne eines bekannten Bog. A' ist, und wenn man sucht, von welchem Bogen Zz die Sehne wird, oder von wie viel Graden der Bogen BZ sein wird, der davon die Hälfte und = A ist, so ist nach der Gleichung (§. 198):

$$a^2 = 3 - 2 \sin. A \sqrt{2}.$$

hieraus:

$$\sin. A = \frac{3 - a^2}{2\sqrt{2}};$$

und setzt man dafür den Werth von

$a^2 = 4 \sin.^2 \tfrac{1}{2} A' = 2 - 2 \cos. A'$ (§. 155),

so ist: $\sin. A = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \cos. A' \sqrt{\frac{1}{2}}$

$= \sin. 30° . \sin. 45° + \cos. A' . \sin. 45°;$

und (§. 156, 158), da

$\sin. (45° + A') = \cos. (45° - A'),$

so erhält man die Gleichung;

[4] $\sin. A = \frac{1}{2} [\sin. 45° + \sin. (45° - A) + \cos. (45° - A')].$

§. 209. Eben so, wenn man den Bogen B' kennt, der zur Sehne die Entf. bZ hat, und man den Bogen B = BZ mittelst Zz sucht, welches die die Sehne von 2B ist, indem man die Gleichung (B) aus §. 196 mit $\sqrt{3} + 1$ multiplicirt, und wegen

$$bB^2 = \frac{5 - \sqrt{2}}{2},$$

und $Ab = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1),$

so hat man:

$bZ^2 . (\sqrt{5} + 1) = 2\sqrt{5} + 4 \sin. B.$

und setzt man für bZ^2 sein Werth:

$4 \sin.^2 \frac{1}{2} B' = 2 - 2 \cos. B'$ (§. 155),

so ist, nach gemachten Reductionen:

$$\sin. B = \frac{1}{2} - 2 \cos. B' . \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$

Da nun Bb, die Seite des Fünfseits $= \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$ Sehne von 72° ist, so ist:

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} = \sin. 36°;$$

woraus: $\frac{1}{4}\,\frac{5-\sqrt{5}}{2} = \sin.^2 36°$;

folglich:

$$1 - \sin.^2 36° = \cos.^2 36° = \sin.^2 54°$$
$$= \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2:$$

woraus dann hervorgeht, daß

$$\sin. B = \tfrac{1}{2} - 2\cos. B' \,.\, \sin. 45°,$$

und endlich (§. 156)

[5] $\sin. B = \sin. 30° - \sin.(54° + B')$
$\qquad - \sin.(54° - B')$.

§. 210. Eben so, wenn man den Bogen E' kennt, welcher eZ als Sehne hat, und wenn man den Grad des Bogens BZ = E sucht, gleich der Hälfte des Bog., welcher zur Sehne Zz = sin. E hat, und in der Gleichung [E] in §. 196 für eZ in ihren Werth $2 - 2\cos. E'$ setzt, für eB^2 ihren Werth $3 - \sqrt{2}$, und für AE ihren Werth

$\sqrt{(2-\sqrt{2})} = 2\sin. 22° 30'$ (§. 198, 138)

so ist: $2\sin. E\sqrt{(2-\sqrt{2})} = 2\cos. E' + 1 - \sqrt{2}$:

und dieß multiplicirt mit $\sqrt{(2+\sqrt{2})}\sqrt{2}$ giebt:

$$4\sin. E = 2\cos. E' \,.\, \sqrt{2}\,\sqrt{(2+\sqrt{2})}$$
$$- (\sqrt{2}-1)\sqrt{2} \,.\, \sqrt{(2+\sqrt{2})}$$
$$= 2\cos. E'\sqrt{(2+\sqrt{2})}\sqrt{2} - (2-\sqrt{2})\sqrt{(2+\sqrt{2})}$$
$$= 2\cos. E'\sqrt{(2+\sqrt{2})}\sqrt{2} - \sqrt{(2-\sqrt{2})}\sqrt{2};$$

dividirt man nun mit 4, und beachtet, daß man hat:

$$\sqrt{(2+\sqrt{2})} = 2\sin. 67° 30' \text{ (§. 37)},$$

und $\sqrt{2} = 2 \sin. 45°$,

dann ist (§. 156, 157, 158):

$\sin. E = 2 \cos E' . \sin. 67° 30' . \sin. 45°$
$- \sin. 22° 30' . \sin. 45°$ oder $\sin. E$
$= \cos. E' . [\cos. (67° 30' - 45°) - \cos. (67° 30' + 45°)]$
$- \sin. 22° 30' . \sin. 45°$;

oder auch $\sin. E = \cos. E' . \cos. 22° 30'$
$+ \cos. E' \sin. 22° 30' - \sin. 22° 30' . \sin. 45°$;

oder endlich:

$$[6] \sin. E = \tfrac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \cos. (E' + 22° 30') + (E' + 22° 30') \\ + \sin. 20° 30' + \cos. (E' - 22° 30') \\ - \sin. (E' - 22° 30') - \cos. 22° 30' \end{matrix} \right\}.$$

§. 211. Wir haben also aus den drei Gleichungen [A], [B] und [E] sechse gezogen, mittelst deren wir aus den gegebenen Bogen mit Hülfe der drei einzigen P. a, b, e neue Bogen, sowohl als ihre neue Sehnen, erhalten können.

§. 212. Da es eine unendliche Anzahl Bogen geben kann, so giebt jede dieser Gleichungen eine unendliche Menge von Aufl. Will man aber nur die Weite der Bogen haben, die man mittelst derselben P. a, b u. e finden kann, so findet man deren 120 für jede Gleichung, ob es gleich für keine von ihnen besondere Grenzen giebt. In der That könnte man mittelst dieser drei P. die Peripherie in 240 gl. Theile theilen (§. 57), und folglich den Halbkr. in 120; man hätte alsdann 60 P. Z und 60 P. z, die

zusam-

zusammengenommen 120 Fälle für jede Gleichung bestimmen.

Aber keine von ihnen wird besondere Grenzen haben.

§. 213. Wollte man z. B. mit dem Zirkel die Sehne von 3° nehmen, d. h., von dem 120. Theil der Peripherie (§. 42), und einen Bogen beschr., indem man in a die Spitze des Zirkels setzt, so würde dieser Bogen die Periph. in keinem Punkt Z schneiden, da seine Sehne kleiner ist, als die Entfernung $aF = \sqrt{2} - 1$. Man würde also in der Gleichung [4] statt A' nicht den Bogen 3° setzen können, und wenn man dieß thun will, so wird man für den sin. A einen Werth, der größer als die Einheit ist, finden, d. h., einen sich widersprechenden Werth. Um zu sehen, welches der erste Bogen ist, den man an die Stelle von A' zwischen die Bog. der Reihe 1° 30', 3°, 4° 30', u. s. w. würde setzen können, bemerke man, welches der Bogen ist, der zur Sehne die Entfernung aF hat, welche zwischen dem P. a und dem Kreise die kleinste, und gleich ist

$$\sqrt{2} - 1 = 2 \sin. 45° - \tfrac{1}{2} = 0{,}91421356 = \cos 23° 54' +.$$

Der erste anzuwendende Bogen wäre also von denen, die man mittelst der drei P. a, b, e finden könnte, der von 24°.

Nach diesem Bog. könnte man alle andere Bog. aus der Reihe 25° 30', 27°, 29° 30' bis zu 180° an-

wenden; denn die Sehnen aller dieser Bogen können Entfernungen des P. a nach irgend einem P. Z oder z der Peripherie sein.

§. 214. Die Gleichungen [5] und [6] sind schon begrenzter; denn in der Gleichung [5] kann man die Bog. B′, deren Sehne kleiner als bf oder größer als bF ist, nicht anwenden. Eben so läßt die Gleich. [6] keinen der Bogen E′ zu, deren Sehne kleiner als eF u. größer als ef ist.

§. 215. Wir werden in der Folge sehen, in welchen Fällen man sich einiger dieser Werthe zur Theilung des Kr. oder zu irgend einer andern nur durch Näherung zu lösenden Aufg. vortheilhaft bedienen kann, indem man diejenigen auswählt, welche sich dem gesuchten Werth am meisten nähern, und sich zugleich durch Bogenschnitte, die vom rechten W. wenig abweichen, bestimmen.

§. 216. Um jedoch alle mögliche Vortheile von den drei P. a, b, e zu ziehen, ohne neue einzuführen, so ziehen wir aus den drei Gleich. [A], [B] u. [E] sechs andere, um neue Werthe von Bog. und Sehnen zu haben.

§. 217. Es sei BZ ein bekannter Bog. = B, z. B. einer von denen, welche man durch die Aufg. des zweiten Buchs erhält. Mit dem Zirkel nimmt man die Entfernung bZ, und trägt sie von a nach irgend einem andern P. Z′, der einen andern Bogen

$BZ' = A$ bestimmt, und vergleicht die beiden Gleichungen [A] und [B], so ergiebt sich daraus eine neue Gleich., die seinen Werth angiebt.

In der That, wenn man in diesen beiden Gleich. $bZ = aZ'$ macht, indem man in der ersten

[A] $Zz = 2 \sin. A$,

dann in der zweiten

[B] $Zz = 2 \sin. B$ macht, so ist:

$aB^2 - 2 \sin. A . Aa = bB^2 + 2 \sin. B . Ab$,

oder auch (§. 198):

$$3 - 2 \sin. A . \sqrt{2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} + \sin. B (\sqrt{5} - 1);$$

und bestimmt man $\sin. A$, so ist:

$$\sin. A = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \sqrt{\tfrac{1}{2}} - 2 \sin. B . \frac{\sqrt{5}-1}{4} \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$= \sin. 54° . \sin. 45° - 2 \sin. B . \sin. 18° . \sin. 45°$ (§. 209)

$= \frac{1}{2} (\cos. 9° + \sin. 9°) - B (\cos. 27° - \sin. 27°)$ (§. 158);

woraus (§. 155 u. folgende):

$$[7] \sin. A = \tfrac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \cos. 9° + \sin. 9° \\ + \cos. (B - 27°) - \sin. (B - 27°) \\ - \cos. (B - 63°) + \sin. (B - 63°) \end{matrix} \right\}.$$

§. 218. Man könnte auch hier für B nicht alle Bogen nehmen, sondern allein diejenigen, welche eine Entf. bZ oder bz geben, die nicht kleiner als aF ist

§. 219. Es sei nun ein Bogen $BZ = A$ bekannt, wenn man die Entf. aZ mit dem Zirkel von b nach irgend einem andern P. Z' in derselben Prph.

trägt, die den Bogen $BZ' = B$ bestimmt, so wird man diesen Bogen B kennen, und will man seine Sehne haben, so befreie man den sin. B aus der Gleichung (§. 217):

$$\sin. A = \frac{\sqrt{5}+1}{4}\sqrt{\tfrac{1}{2}} - 2\sin. B\,\frac{\sqrt{5}-1}{4}\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit den Factor $2(\sqrt{5}-1)\sqrt{2}$, so ist:

$$2\sin. a(\sqrt{5}+1).\sqrt{2} = 3+\sqrt{5}-4\sin. B;$$

hieraus:

$$\sin. B = \frac{3+\sqrt{5}}{4} - 4\sin. A \,.\, \frac{\sqrt{5}+1}{4}\,.\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$= 2\sin.^2 54° - 4\sin. A.\sin. 54°.\sin. 45°$ (§. 209); wenn man die Gleichung (§. 155 u. folg.) wie oben behandelt, so ist endlich:

[8] $\sin. B = 1 + \sin. 18° - \sin.(A+9°)$
$+\cos.(A+9°) - \sin.(A-9°) - \cos.(A-9°)$:

§. 220. In dieser Gleich. [8] könnte man für A nicht die Bogen BZ anwenden, die eine Entf. aZ, welche größer als bF, geben.

§. 221. Wenn man nun jetzt in der Gleich.

[A] aus §. 196 $Zz = 2\sin. A$

macht, und in der Gleich. [E] eine andere Entfern. $Zz = 2\sin. E$, und dann in den beiden Gleichungen $aZ^2 = eZ^2$ macht, so ist, nach den nöthigen Substitutionen (§. 198):

$$3-2\sin.A\sqrt{2}=3-\sqrt{2}-2\sin.E.\sqrt{(2-\sqrt{2})};$$

$$\sin.A=\tfrac{1}{2}+2\sin.E\,\tfrac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{2})}.\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$=\tfrac{1}{2}+2\sin.E.\sin.22°\,30'.\sin.45°, \text{ u. (§. 158)}$$

$$=\tfrac{1}{2}+\sin.E.\cos.22°\,30'-\sin.E.\sin.22°30';$$

woraus endlich (§. 156, 158):

$$[9]\quad \sin.A=\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}+\sin.(E+22°\,30')\\+\cos.(E+22°\,30')\\+\sin.(E-22°\,30')\\-\cos.(E-22°\,30')\end{matrix}\right\}.$$

§. 222. Man kann diese neunte Gleich. noch auf eine andere Art finden, um die Rechnung mittelst der künstlichen Sinus und Cosinus, welche man in den Tafeln von zehn zu zehn Sec. findet, leichter zu machen.

Deshalb, da man hat:

$$\sin.A=\tfrac{1}{2}+2\sin.E.\tfrac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{2})}.\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{1}{\sqrt{(4-2\sqrt{2})}}+\sin.E\right]\tfrac{1}{2}\sqrt{(4-2\sqrt{2})}$$

$$=\frac{[\frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{2})}+\sin.E]\,\frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

$$=(\sin.67°\,30'+\sin.E).\frac{\sin.22°\,30'}{\sin.45°}\ (\text{§. 37});$$

und setzt man $67°\,30'=p$; $E=q$, so ist (§. 156):

$$(9)\quad \sin.A=\frac{\sin.\frac{1}{2}(67°\,30'+E).\cos.\frac{1}{2}(67°\,30'-E)}{\cos.22°\,30'};$$

eine Gleichung, die leicht mittelst der Logarithmen der Sinus und Cosinus zu berechnen ist.

§. 223. Wenn man also mit dem Zirkel eine

Entfernung aus e zu irgend einem Endpunkte Z eines Bogens AZ = E nimmt, und trägt sie von einem P. a nach irgend einem andern P. Z' der Peripherie, so wird man den neuen Bogen BZ' = A mittelst der Gleichung [9] oder aus (9) kennen. Diese Gleichungen werden ihre Grenzen haben, weil der Bogen BZ so sein sollte, daß die Entf. eZ nicht kleiner als aF sei.

§. 224. Man hat gefunden (§. 221):

$$2 \sin. A \sqrt{2} = \sqrt{2} + 2 \sin. E \sqrt{(2 - \sqrt{2})};$$

multiplicirt man nun diese Gleichung mit $\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{\sqrt{2}}$; so ist:

$$2 \sin. A \sqrt{(2 + \sqrt{2})} = \sqrt{(2 + \sqrt{2})} + 2 \sin. E;$$

woraus:

$$\sin. E = 2 \sin. A \tfrac{1}{2}\sqrt{(2 + \sqrt{2})} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(2 + \sqrt{2})}$$
$$= 2 \sin. A \sin. 67° 30' - \sin. 67° 30' \text{ (§. 37)};$$

daher (§. 158):

$$[10] \quad \sin. E = \cos. (A - 67° 30') - \cos. (A + 67° 30') - \sin. 67° 30'.$$

§. 225. Man kann diese Gleich. auch noch auf eine andere Art einrichten, um sie für den Gebrauch der Logarithmen auflöslich zu machen. In der That, da man hat:

$$\sin. E = 2 \sin. (A - \tfrac{1}{2}) \tfrac{1}{2}(2 + \sqrt{2})$$
$$= 2 (\sin. A + \sin. - 30°) . \sin. 67° 30';$$

setzt man:

$A = p: -30° = q$, so ist (§. 156):

[10] $\sin.E = 4\sin.\frac{1}{2}(A-30°)\cos.\frac{1}{2}(A+30°).\sin.67°30'.$

§. 226. Es ist einleuchtend, daß diese zehnte Gleichung auch ihre Grenzen hat, weil man nicht alle Werthe des Bogens BZ oder $BZ \pm A$ darin einführen könnte, welche die Entfernung aZ größer als ef geben würden.

§. 227. Endlich kann man aus der Vergleichung der Gleich. [B] mit [E] zwei andere Gleich. ziehen. Dann trägt man eine Entf. von e nach irgend einem andern P. Z in der Peripherie, welcher der Endp. eines bekannten Bogens $BZ = E$ sei, u. wenn man aus b als Mittelp., u. mit dieser Entf. eZ als Halbm., einen Bogen beschr., welcher die Periph. in irgend einem andern P. Z' schneidet, der den Bog. $BZ' = B$ bestimmt, so wird man diesen Bogen, mittelst seines Sinus, auf folgende Weise finden. Es sei in der Gleichung [B] aus §. 196

$$Zz = 2\sin. B,$$

in der [E] $Zz = 2\sin. E,$

und in beide $bZ = eZ,$

so wird man nach gemachten nöthigen Substitutionen haben (§. 198):

$$\tfrac{1}{2}(5-\sqrt{5}) + \sin. B(\sqrt{5}-1) = 3-\sqrt{2} - 2\sin. E.\sqrt{(2-\sqrt{2})};$$

woraus man zieht:

$$2\sin. B(\sqrt{5}-1) = \sqrt{5}+1-2\sqrt{2}-4\sin. E\sqrt{(2-\sqrt{2})};$$

und multiplicirt man die beiden Seiten der Gleich. mit $\frac{\sqrt{5}+1}{8}$, so ist:

$$\sin.B = \frac{3+\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}.\sqrt{\tfrac{1}{2}} - 4\sin.E\tfrac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{2})}.\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$$
$$= 2\sin.^2 54° - 2\sin.54° . \sin.45°$$
$$- 4\sin.E . \sin.22° 30' . \sin.54° \text{ (§. 209);}$$

woraus man folgert (§. 158):

$$\sin.B = 1 - \cos.180° - \cos.9° - \sin.9°$$
$$- 2\sin.E(\cos.31° 30' - \cos.76° 30');$$

und folglich (§. 156):

[11] $\sin.B = 1 + \sin.18° - \cos.9° - \sin.9°$
$- \sin.(E + 31° 30') - \sin.(E - 31° 30')$
$+ \sin.(E + 76° 30') + \sin.(E - 76° 30').$

§. 228. Die Gleichung [11] wird auch von zwei Seiten ihre Grenzen haben; denn die kleinste Entfernung

$$eF = 1 - \sqrt{(2 - \sqrt{2})},$$

ist kleiner als $bf = 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$,
und die größte ef ist größer als bF.

§. 229. Wenn man die Gleichung

$$2\sin.B(\sqrt{5}-1) = \sqrt{5}+1 - 2\sqrt{2} - 4\sin.E\sqrt{(2-\sqrt{2})},$$

welche man oben gefunden hat (§. 227), mit $\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{4\sqrt{2}}$ multiplicirt, so ist:

$$\sin.E = 2\frac{\sqrt{5}+1}{4}.\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2}.\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}$$

$$-4\sin.B\,\frac{\sqrt{5}-1}{4}.\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}.\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$= 2\sin.54°\sin.67°30'.\sin.45° - \sin.67°30'$$
$$-4\sin.B.\sin.18°.\sin.67°30'.\sin.45°$$
$$= \sin.67°30'.(\cos.9° + \sin.9°) - \sin.67°30'$$
$$-2\sin.B.\sin.67°30'.(\cos.27° - \sin.27°)$$
$$= \tfrac{1}{2}(\sin.76°30' - \cos.76°30' + \sin.58°30' + \cos.58°30')$$
$$-\sin.67°30'$$
$$-\sin.B(\sin.85°30' + 40°30' - \cos.40°30' - \cos.85°30');$$

woraus endlich:

$$[12]\ \sin.E = \tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\sin.76°30' - \cos.76°30' \\ +\sin.58°30' + \cos.58°30'\end{matrix}\right\} - \sin.67°30'$$

$$-\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\cos.(85°30' - B) + \sin.(85°30' - B) \\ -\cos.(85°30' + B) - \sin.(85\ 30' - B) \\ +\cos.(40°30' - B) + \sin.(40°30' - B) \\ -\cos.(40°30' + B) - \sin.(48\ 30' + B).\end{matrix}\right\}$$

eine Gleichung die keine Grenzen hat.

§. 230. Wenn zufällig einer von den Werthen, die man mit diesen zwölf Gleich. findet, gleich beim Anfange sehr nahe einem in der Aufl. der Aufgaben nützlichen und gesuchten Werth ist, so hat man den Vortheil, zu demselben Zweck durch ein sehr einfaches Mittel zu gelangen.

Denn man braucht keine andere außerhalb der Peripherie genommene P. anzuwenden, als die drei

P. a, b u. e, die wir schon oft bemerkt haben, und in der Periph. einen von denen, welche zur vollständigen Theilung der Periph. mittelst der Aufl. der Aufg. des 2ten Buchs dienen. Wir wollen jetzt einige Beispiele geben.

§. 231. Wir werden zuerst sehen, wie man den Kreis nach älterer Art in Grade und Minuten, ohne einen Fehler von einer Secunde, theilen kann. Dieserhalb nehmen wir an, die Peripherie des Kreises BDd (Fig. 12) sei in 240 gl. Th. getheilt (§. 57. 58), von denen jeder wie $Pd = 1°30'$, man fängt an, die positiven Größen von B nach F zu zählen, und auf dieselbe Weise die negativen Größen von B nach f, und daß die P. Z, Z' unbestimmt sind, für jetzt nur der einzigen Bedingung unterworfen, daß sie zwischen B, F in der Periph. und die P. z, z' zwischen B, f liegen. Wir verfahren so, um die zu große Zahl von Figuren zu vermeiden, deren man benöthigt wäre, wenn man für jede Aufg. davon eine wiederholen wollte. Ueberdieß würde die Kleinheit der Theilungen sie kaum selbst in einer viel größern Figur, als die 12te ist, sichtbar lassen.

Aufgabe.

§. 232. Einen Bogen (Fig. 12) von einem Grade der alten Theilung, oder von 1°

ohne einen Fehler von einer halben Secunde zu finden.

Auflösung I.

Es sei der Bogen $Bz = -55° 30'$ (§. 231). Man nehme mit dem Zirkel die Entf. bz, und aus dem P. e, als Mittelp., beschreibe man einen Bog., der die Peripherie in einem P. Z schneidet; dann ist der Bogen $BZ = 52° 59' \frac{17}{17}\frac{39}{51}$, d. h., von 53°, ohne daß 25 Tertien daran fehlen. Man findet nun nach der Aufg. in (§. 42) ausgeführten Theilungen von B nach F den Bogen von $54° = \frac{18}{120}$. Man hat also auch den Bogen $54° - 53° = 1°$ mit der verlangten Annäherung.

Beweis. Wenn man in der Gleichung [12] $B = -55° 30'$ macht, so findet man am Ende der Rechnung

$$\sin. E = 0{,}7986343 = \sin. 52° 59' \frac{17}{17}\frac{39}{51}.$$

Auflösung II.

Es sei der Bogen $bZ = 10° 30'$. Man beschr. aus dem Mittelp. a, mit der Entfernung BZ, als Halbm., einen Bogen, welcher die Peripherie in einem andern P. Z' schneidet; dann ist der Bogen

$BZ' = 29° 29' \frac{25}{25}\frac{11}{32}$, d. h., $= 29° 30'$

ohne einen Fehler von einer halben Secunde.

Man findet ferner in den §. 58 gemachten Theilungen des Kr. den Bogen von 28° 30′ = $\frac{19}{240}$ der Periph. Folglich ist die Differenz der beiden Bogen gleich 1° mit der verlangten Annäherung.

Beweis. Wenn in der Gleich. [7] B = 10°30′, so findet man am Ende der Rechnung:

sin. A = 0,4924215 = sin. 29°29′$\frac{25}{25}\frac{11}{32}$:

folglich weichen die Bg. von dem Werth eines Gradbogens nicht um 29‴ ab.

§. 233. Diese zweite Aufl. ist um 5‴ weniger genähert als die erste, aber die Bogenschnitte geschehen unter einem Winkel, der von einem Rechten weniger abweicht.

§. 234. Weil man den Bg. von 1°30′ (§. 225) hat, und man (§. 226) den Bog. 1° gefunden hat, so hat man auch, indem man sie von einander subtrahirt, den Bogen 30′, oder den halben Grad, und folglich hat man die Methode, die ganze Periph. in halbe Grade zu theilen, ohne Fehler anzuhäufen, u. ohne daß ein P. von seiner wahren Lage um eine halbe Secunde entfernt sei.

Aufgabe.

§. 235. Den Bogen von ein Viertel Grad oder von 15′, ohne Fehler von einer Tertie zu finden.

Auflösung.

Es sei der Bogen $Bz = -12°$; so ist die Entf. ez gleich der Sehne von $87°15'$; man nehme mit dem Zirkel einen dieser Entfernung gleichen Halbm., und schneide damit aus dem P. B als Mittelp., den Bogen BF in einem P. Z', so ist der Bogen $BZ' = 87°15'$. Es ist nun ferner nach den in §. 42 gemachten Kreistheilungen der Bogen $87° = \frac{29}{120}$ der Peripherie. Man bekommt also den Unterschied dieser zwei Bogen $= 15'$.

Beweis. Wenn man in der Gleichung [3] (§. 206):

$$\cos. E' = \sin. 45° - \sin. 30° + \cos. (E - 22° 30') - \cos. (E + 22° 30'),$$

$E = -12°$ macht, so ist:

$$\sin. 45° - \sin. 30° = 0{,}2071068$$
$$\cos. - 34° 30' = 0{,}8241262$$
$$-\cos 10° 30' = -1{,}0167451$$
$$\cos. E' = 0{,}0479781.$$

Folglich findet man in den Tafeln, welche den natürlichen Sinus mit 7 Ziffern angeben:

$$0{,}0479781 = \cos. 87°15'$$

ohne einen Unterschied in der letzten Ziffer.

Gebraucht man nachgehends mehr Decimalstellen, so findet man:

$\cos. E' = 0{,}0479780622.$

$\cos. 87^\circ 15' = 0{,}047978128520.$

und nimmt man nur acht Decimalstellen, so ist:

$$\cos. 87^\circ 15' 1'' = 0{,}04797229.$$

Es ist also für $1''$ der Unterschied 584. Wenn also 584 zur Differenz $60'''$ geben, so würden 7 geben $\frac{105}{146}$ Tertien. Es ist also der Bogen E', der zur Sehne die Entfernung eZ' hat, $= 87^\circ 15'$ mit einem Fehler kleiner als $1'''$.

§. 236. Mittelst dieser Aufg. könnte man die Periph. in 1440 gleiche Theile theilen, d. h., in 1440 Viertel Grade, ohne daß in irgend einem Theilungspunkte ein Fehler von drei Tertien wäre. Denn wenn auf jeden Bogen $B\delta$ von $1^\circ 30'$ drei Theilungen von $15'$ zu $15'$ von P nach δ und 2 von δ nach P macht, so ist der Bogen $P\delta$ in 6 gleiche Theile getheilt, von denen jeder $\frac{1}{4}$ Grad ist, ohne daß ein Fehler von $1'''$ in der Stelle eines Theilungsp. wäre. Dasselbe wird von dem Uebrigen der Peripherie gelten. Wir werden nun künftig die Peripherie in Grade und Viertel Grade getheilt annehmen, indem wir sie als genau betrachten, um die Berechnung zu vereinfachen.

Man könnte, wenn man wollte, die Fehler berechnen.

Aufgabe.

§. 237. Einen Bogen von 10′ oder den sechsten Theil eines Grades ohne einen Fehler von 10‴ oder des sechsten Theils einer Secunde zu finden.

Auflösung.

Es sei der Bogen $Bz = -49^\circ 39'$; so wird die Entf. bz gleich der Sehne des Bog. von $38^\circ 50'$ ohne einen Fehler von 10‴ sein. Zieht man nun den Bogen $38^\circ 50'$ von dem Bog. $39^\circ = \frac{13}{120}$ der Peripherie, den man aus §. 42 hat, ab, so ergiebt sich der Bogen von 10′.

Beweis. Wenn man in der Gleichung [2]

$$B = -39^\circ 30'$$

macht, so wird sie:

$$\cos. B' = 0{,}7789738 = \cos. 38^\circ 49' \tfrac{18}{18}\tfrac{19}{24};$$

folglich $B' = 38^\circ 50'$, bis auf 9‴ nahe.

§. 238. Subtrahirt man von einem Bg. von 50′ dem 9‴ fehlen, einen Bg. von 45′ (§. 236), dem einige Tertien fehlen, so hat man den Bg. von 5′ oder den zwölften Theil eines Grades, ohne einen Fehler von 9‴.

Aufgabe.

§. 239. Den Bogen von 6′ oder ein Zehntel des Grades, ohne einen Fehler von 13‴ zu finden.

Auflösung.

Es sei der Bogen BZ = 45°, d. h., es sei der Bogen BG; aus dem P. b, als Mittelp., mit der Entfernung BG als Halbmesser, sei ein Bogen beschrieben, welcher die Peripherie in z schneidet; so hat man ohne einen Fehler von 13‴, den Bogen

$$Bz = -40^\circ\,6',$$

und subtrahirt man (§. 236) den

Bogen von $= 40^\circ;$

so bleibt der Bogen von $6'.$

Beweis. Wenn man in der Gleichung [5] $B' = 45^\circ$ macht, so wird sie:

$$\sin.B = -0{,}6441228 = \sin.-40^\circ\,5'\tfrac{22}{23}\tfrac{17}{23}.$$

Es ist demnach der Bogen $B = Bz = -40^\circ\,6'$ bis auf 12‴ nahe.

§. 240. Subtrahirt man von den Bg. von 6′ (§. 239) den Bog. 5′ (§. 238), so ist der übrigbleibende Bogen von 1′ mit einem Fehler von einigen Tertien. Man kann aber diesen Bogen unmittelbar durch die folgende Aufg. finden.

Auf-

Aufgabe.

§. 241. Den Bogen von 1′ unmittelbar ohne einen Fehler von 22‴ zu finden.

Auflösung.

Es sei der Bogen Bz = — 27°; aus dem P. e, als Mittelp., mit einem Halbm. gleich der Entf. bz, sei die Peripherie in Z geschnitten. So ist der Bogen BZ = 29° 59′ mit einem Uebermaß von 10‴. Da nun der Bogen BN 30° hat (§. 31), so wird der Bog. ZN = 1′ weniger 10‴ sein.

Beweis. Wenn man in der Gleichung [12] B = — 27° macht, so ist:

sin. E = 0,4997496 = sin. 29° 59′ $2\frac{15}{19}$;

folglich, u. s. w.

Aufgabe.

§. 242. Den Bogen von 9′ ohne einen Fehler von 7‴ zu finden.

Auflösung.

Aus dem P. e, als Mittelp., mit der Entf. bK als Halbm., sei ein Bog. beschr., welcher die Periph. in z schneidet; dann ist der Bog. Bz = — 4° 21′ mit einem Uebermaß von 6‴, welcher von —4° 30′ subtrahirt als Rest 9′ ohne einen Fehler von 7‴ giebt.

Beweis. Wenn man in der Gleichung [12] $B = 15^\circ = BK$ (§. 32) macht, so ist:

$$\sin. E = -0{,}0758494 = \sin. -4^\circ 21' \tfrac{5}{2901}:$$

folglich der Bogen

$$Bz = -4^\circ 21' 0'' 6'''.$$

Diese Aufg. wird noch zur neuen Eintheilung des Kr. dienen, wie wir es nachher sehen werden. (§. 256.)

§. 243. Da dem Bg. 15′ weniger als 1‴ (§. 235) fehlt,
der von 10′ weniger als 10‴ (§. 237) überschreitet,
" " 6′ " " 13‴ (§. 239) fehlen,
" " 1′ " " 22‴ (§. 241) " und
" " 9′ " " 7‴ (§. 242) "

so könnte man sie durch Addition oder Subtraction verbinden, ohne die Fehler sehr anzuhäufen, so daß zuletzt die ganze Periph. sich in Grade und Minuten getheilt findet, ohne einen andern Fehler als sehr wenige Tertien. In der That, wenn man z. B. den Bog. 9′ verdoppelt, so hat man einen Bog. 18′ bis 14‴ nahe, und subtrahirt man von diesem Bg. den von 6′, der bis auf 13‴ nahe ist, so ist der Bg. 12′ ohngefähr um 1‴ zu gering. Subtr. man nun diesen Bogen von dem von 15′ der bis auf eine Tertie nahe ist (§. 235), so hat man den Bg. 3′ mit kaum einem Fehler von einer Tertie. Durch dieß Mittel könnte man jeden Bg. 15′, in fünf gl. Theile

theilen, und die ganze Periph. wird sich bei dieser letzten Theilung von drei zu drei Minuten getheilt ergeben, mit einem Fehler von weniger als sechs Tertien; dieser Fehler wird noch geringer, wenn man sie in entgegengesetzter Richtung trägt, von derjenigen von höchstens drei Tertien, welche man in der Theilung von 15′ zu 15′ begeht (§. 235). Wendet man nun den Bogen an, der nur 4‴ zu klein ist (§. 240), um jeden Bogen 3′ zu theilen, so begeht man keinen Fehler mehr von 10‴, und man hat die Peripherie in Grade und Minuten getheilt.

Man könnte auch diese Bogen oder andere aus den zwölf vorherg. Gleich. gezogene so verbinden, daß man dahin gelangt, kleinere Fehler zu begehen, und wir werden dazu einige Aufg. anwenden, wenn einerseits die Theilung des Kr. in 360° mit der Zeit nicht aufhören sollte, angewendet zu werden, und wenn wir überdieß glauben, daß die Künstler, welche sich derselben bedienen wollten, diese Untersuchungen für die Praxis nützlich fänden. Wir glauben jedoch nicht die folgenden Aufgaben auslassen zu dürfen, in deren Auflösung wir die Eintheilung des ganzen Kreises in alte Grade und Minuten annehmen, die wir, der Einfachheit der Rechnung wegen, als genau betrachten.

Aufgabe.

§. 244. Einen Bogen von $20''$ oder von $\frac{1}{3}$ Minute zu finden, welcher kaum $1'''$ zu viel hat.

Auflösung I.

Man suche (§. 201) den Bogen von $40''$ mit weniger als einer Tertie zu viel. Folgl. hat auch der Bogen $20''$, Complement von einer Minute, nicht ganz $1'''$ zu wenig.

Auflösung II.

Aus e, mit einem Halbm. gleich der Sehne des Bogens von $61°30'$, sei die Periph. in Z geschnitten; so ist der Bogen $BZ = 20°39'40''$ mit kaum einer Tertie zu viel. Subtrahirt man nun diesen Bogen von dem von $20°40'$, so ist der Rest $20'$ mit kaum $1'''$ zu wenig.

Beweis. Wenn man in der Gleichung [6] $E' = 61°30'$ macht, und man sich der größern Sinus-Tafeln bedient, so ist:

$$\sin.BZ = \sin.E = 0{,}35283991;$$
$$\text{und } \sin.20°39'40'' = 0{,}35283984.$$

Da nun $\log. 0{,}3528399 = 9{,}5475777,$
$\log.\sin. 20°39'40'' = 9{,}5475776,$
$\log.\sin. 20°39'50'' = 9{,}5476334,$
Die Differenz = 558,

so übertrifft folgl. E den Bog. von $20^{\circ}39'40''$ etwa um $\frac{10}{1568}$, d. h., um weniges mehr als $1'''$.

Aufgabe.

§. 245. Den Bogen von $15''$ oder von $\frac{1}{4}$ Minute bis auf etwa $10'''$ nahe zu finden.

Auflösung.

Aus e, mit einem Halbm. gleich der Sehne von $31^{\circ}30'$, sei die Peripherie in Z geschnitten; dann ist der Bog. $BZ = 57^{\circ}30'15''$ um $9'''$ zu geringe.

Beweis. Wenn man in der Gleichung [6] $E' = 31^{\circ}30'$ macht, so findet man $E = 57^{\circ}30'\frac{386}{1563}$; aber es ist $\frac{390}{1563} = \frac{1}{4}$. Es fehlen ihm also ungefähr $\frac{4}{1563}$ der Periph., d. h., ungefähr $10'''$.

Aufgabe.

§. 246. Einen Bogen von $12''$ oder $\frac{1}{5}$ Minute bis etwa auf $1'''$ nahe zu finden.

Auflösung.

Es sei $Bz = -10^{\circ}30'$; aus a, mit einem Halbm. gleich der Entf. von bz, sei die Peripherie in Z geschnitten: so hat man $BZ = 40^{\circ}40'12''$ mit ungefähr um $1'''$ zu geringe.

Beweis. Wenn man in der Gleichung [7]

$B = -10^0\,30'$ macht, dann findet man durch Rechnung, daß $A = 40^0\,40'\,\frac{440}{2206}$. Man hat aber $\frac{441}{2196} = \frac{1}{5}$: man hat also $\frac{1}{2206}$ der Periph., d. h., ungefähr $1'''$ zu wenig.

Wenn man die Rechnung mit größern Tafeln gemacht hätte, so würde man den Fehler mit mehr Genauigkeit aufgedeckt haben.

Aufgabe.

§. 247. **Einen Bogen von $10''$ oder von $\frac{1}{6}$ Minute, die ungefähr um $1'''$ übersteigt, zu finden.**

Auflösung.

Es sei der Bogen $Bz = -24^0$. Aus a, mit einem Halbmesser = der Entf. ez, sei ein Bogen beschr., der die Periph. in Z schneidet: so ist der Bogen $BZ = 16^0\,15'\,10''$ mit der verlangten Annäherung.

Beweis. Wenn in der Gleich. [9] $E = -24^0$, so wird man als Resultat finden:

$$\log.\ \sin.\ A = 9{,}4469652.$$

Es findet sich nun, daß dieser Logarithmus gleich der des Sinus von $16^0\,15'\,10''\,\frac{20}{722}$ ist; folgl. ist das Uebermaß noch nicht 2 Tertien.

Aufgabe.

§. 248. Den Bogen von 5″ oder von $\frac{1}{12}$ Minute, mit einem mittelst der gewöhnlichen Tafeln nicht abzuschätzenden Fehler, und kleiner als 2‴ zu finden.

Auflösung I.

Es sei der Bogen $BZ = 4^{\circ}\,30'$; aus a, mit einem Halbm. gleich der Entf. eZ, sei ein Bogen beschr., welcher die Periph. in einem andern P. Z′ schneidet; dann ist der Bogen $BZ' = 32^{\circ}\,51'\,5''$ mit der verlangten Annäherung.

Beweis. Wenn man in der Gleichung [9] $E = 4^{\circ}\,30'$ macht, so wird das Resultat sein:

$$\log.\sin. A = 9{,}7343692;$$

aber $\log.\sin. 32^{\circ}\,51 = 9{,}7343529$,

und die Differenz ist 163: ferner, ist in den Tafeln die Differenz für zehn Minuten 326; d. h., genau das Doppelte von 163; also u. s. w.

Berechnet man den Fehler mit größern Tafeln, so findet man ihn kleiner als 2‴.

Auflösung II.

Es sei der Bogen $BZ = 31^{\circ}\,30'$. Aus a, mit einem der Entfernung von eZ gleichen Halbm., sei die Periph. in einem andern P. Z′ geschnitten; so

haben wir den Bogen $BZ' = 51^{\circ}30'55''$, um weniger als eine Tertie zu klein.

Beweis. Wenn in der Gleich. [9] $E = 31^{\circ}30'$, so wird man mittelst der gewöhnlichen Tafeln finden:

$\log. \sin. A = 9{,}8936465 = \log. \sin. 51^{\circ}30'50''\frac{84}{167}$,

und wird dieser Bruch $\frac{84}{167}$ mit $10''$ verglichen, so giebt er $5''$, mit einem Uebermaß von weniger als $1'''$. Es ist also $A = 51^{\circ}30'55''$, und dieser Bg. von $51^{\circ}31'$ subtrahirt, giebt $5''$ mit der verlangten Annäherung. Aber es ist Zeit, zu dem Beweise vom Gebrauch, welchen man von den zwölf vorhergehenden Gleichungen machen kann, überzugehen, wenn man die Periph. des Kreises nach der neuern Art der Franzosen theilen will.

§. 249. Nach dieser Art wird die Peripherie in 400 Grade getheilt, damit der vierte Theil des Kreises, welcher der Grund der ganzen Trigonometrie ist, hiernach in 100 Grade getheilt ist.

Jeder Grad ist in 100 Minuten getheilt, jede Minute in 100 Secunden u. s. w.

Man kann, wenn man will, die Benennung der Grade, Minuten und Secunden weglassen, da die Stellung der Decimalzahlen schon hinlänglich die Natur der Brüche erkennen läßt.

§. 250. Man sieht folglich, daß 9 alte Grade 10 neue betragen, oder auch daß $9^{\circ} = 0{,}10$; daß $54' = 0{,}01$; daß $27' = 0{,}005$; daß $5'24'' = 0{,}001$;

daß $32''24''' = 0{,}0001$; d. h., daß ein neuer Grad 54 alte Minuten, daß eine neue Minute $32''24'''$ nach der alten Eintheilung betragen u. s. w.

§. 251. Die genau erhaltenen Eintheilungen mittelst der drei P. a, b und e in dem zweiten Buche geben bis den 240sten Theil der Periph. (§. 59). Der Bogen, welcher diesen Theil bildet, ist genau $1^0\,30'$ der alten Theilung. Er drückt sich nicht auf gleiche Weise mit einer endlichen Anzahl Decimalstellen in der neuern Eintheilung aus; der erste aus der Vereinigung mehrerer von 240stel gebildeten Bogen, den man mit einer endlichen Anzahl Decimalstellen des Quadranten ausdrückt, ist der von $\frac{3}{240}$ oder von $\frac{1}{80}$ der Peripherie, welcher von $4^0\,30' = 0{,}05$ des Quadranten ist, d. h., von 5 Graden der neuen Theilung.

Man kann also mit den Methoden des zweiten Buchs und mittelst der drei außerhalb der Periph. genommenen P. a, b u. e dieselbe in zwei gleiche Theile theilen, jede von 5 neuen Graden, und dieß mit geometrischer Genauigkeit, welches einer von den Vortheilen dieser Geometrie ist.

§. 252. Man würde auch, wenn man wollte, durch die Halbirung der Bogen (§. 60), nachgehends die Periph. in Bg. von $2\frac{1}{2}$ Grad oder von 0,025 u. so mit dieser Theil. fortfahren; aber es ist klar, daß man durch dieß Mittel Bg. von einem Grade mit Genauig-

keit nicht haben kann. Es bleibt also der Geometrie kein anderes Mittel übrig, um den Bogen von einem Grade (§. 63) zu erhalten, als irgend eine Construction zu suchen, welche ihn wenigstens durch Annäherung giebt.

Aufgabe.

§. 253. Den Bogen eines neuen Grades, oder von 0,01 zu finden, ohne daß er um $\frac{1}{6}$ Secunde der neuen Theilung oder drei Tertien der alten abweiche.

Auflösung.

Nehmet mit dem Zirkel die Sehne von 138° der alten Theilung, oder von $\frac{46}{120}$ der Periph. (§. 42) und beschr. aus a, einen Kreis, welcher den vierten Theil des Kr. Bf in einem P. z schneidet, dann wird der Bogen Bz von 11 Graden der neuen Theilung sein; subtrahirt man nun den Bogen von $9^\circ = 0{,}10$ (§. 252), so bleibt ein Bogen $= 0{,}01$ mit der verlangten Annäherung übrig.

Beweis. Wenn man in der Gleichung [4] $A' = 138$ macht, so ist:

$$\sin. A = \tfrac{1}{2}(\sin. 45^\circ + \sin. 183^\circ + \sin. -93^\circ)$$
$$= \tfrac{1}{2}(\sin. 45^\circ - \sin. 3^\circ - \sin. 87^\circ).$$

Man hat: $-\sin. 3^\circ = -0{,}0523360$

$-\sin. 87^\circ = -0{,}9986295$

$\sin. 45^\circ = \quad 1{,}2928932$

$-0{,}3438587$

$-0{,}1719293.$

Es ist ferner $\sin. 9^\circ 54' = 0{,}1719291$

$\sin. 9^\circ 55' = 0{,}1722156.$

Folglich der Bogen $Bz = A = 9^\circ 54'$, bloß mit dem Uebermaß von $\frac{2}{2863}$ einer Minute der alten Theilung, d. h., ohne ein Uebermaß von $4'''$, und folgl. ohne einen Fehler von einer Secunde der neuen Theilung.

§. 254. Man könnte mit etwas ausgedehntern Tafeln, als die gewöhnlichen, diesen Fehler mit mehr Genauigkeit aufsuchen. In allen Fällen ist er so klein, daß, wenn man ihn auch noch zwei- oder drei mal häufte, er in den größten Quadranten doch nicht bemerkbar würde. Man hat aber in ihrer Theilung nicht nöthig, ihn mehr als zweimal zu häufen; denn man hat schon mit geometrischer Genauigkeit den Bogen von 0,05 (§. 251).

Wenn man auf diesen Bogen zwei Theilungen eines Grades macht, indem man von den beiden Endpunkten anfängt, und in entgegengesetzter Richtung fortgeht, so wird man auf diesen Bogen 4 P. bemerkt haben, die dann die Theilungen in 5 Grade geben werden, und jeder dieser Punkte wird von

seiner wahren Stelle nicht um 6 Tertien der alten Theilung, oder um $\frac{1}{3}$ Secunde der neuen entfernt sein.

§. 255. Dieser Aufgabe gemäß, wird man die Peripherie in 400 Grade der neuen Theilung getheilt annehmen.

Aufgabe.

§. 256. Den Bogen eines neuen halben Grades zu finden, ohne daß ein Uebermaß von sechs Tertien der alten Theilung oder $\frac{1}{3}$ Secunde der neuern statt habe.

Auflösung.

Nehmet mit dem Zirkel die Entf. des P. b bis zum P. K, und aus e, mit diesem Halbm. bK, beschreibt einen Bogen, welcher die Periph. in z trifft, so hat man den Bogen $Bz = -4^{\circ}\,11'$, mit einem geringern Uebermaß als $7'''$; davon subtrahirt einen Bogen $3^{\circ} = Np$ (§. 43), so bleibt ein Rest von $1^{\circ}\,21'$, d. h., ein und $\frac{1}{2}$ Grad der neuen Theilung; nun kann man aus allen diesen P. der Grade (§. 225) als Mittelp. und mit einem Halbm. gleich der Sehne dieses Bg. alle diese Grade halbiren.

Beweis. Wenn man in der Gleichung [12] $B = BK = 15^{\circ}$ (§. 32) macht, so ist:

$E = -4^{\circ}\,21'\frac{7}{2901}$; folgl. u. s. w. (§. 242).

Aufgabe.

§. 257. Den Bogen eines Fünftel-Grades der neuen Theilung zu finden, ohne daß ein Uebermaß einer alten Secunde statt habe.

Auflösung.

Aus e, mit einem Halbm., der gl. der Sehne von 51°, beschreibt einen Bog., welcher den Quadranten des Kr. in Z schneidet, so ist der Bog. BZ $37\frac{1}{5}$ Grad der neuen Eintheilung, mit der verlangten Genaugkeit.

Beweis. Wenn man in der Gleichung [6] $E' = 51^\circ$ macht, so ist:

$$E = 33^\circ 28' \tfrac{1968}{2426} = 33^\circ 28' 48'' \tfrac{1632}{2426}.$$

Aber $33^\circ 28' 48'' = 0{,}372$.

Folglich, u. s. w.

Aufgabe.

§. 258. Den Bogen von $\frac{4}{10}$ eines neuen Grades zu finden, ohne daß ein Uebermaß von alte $16'''$ statt habe.

Auflösung.

Es sei der Bg. BZ $= 76^\circ 30'$: nun beschreibe aus a, mit einer Oeffnung des Zirkels $=$ bZ', einen

Bg., welcher den Quadranten des Kr. in Z' schneidet; dann ist der Bog. $BZ' = 0{,}094$, d. h. $= 9/4$ neue Grade, mit dem angezeigten Uebermaß.

Beweis. Wenn man in der Gleichung [7] $B = 76^0\,30'$ macht, so ist:

$$A = 8^0\,27'\tfrac{17}{28}\tfrac{38}{77}.$$

Aber $8^0\,27'\tfrac{17}{28}\tfrac{26}{77} = 0{,}094$.

Folglich u. s. w.

Aufgabe.

§. 259. Einen Grad der neuen Theilung in 10 gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Nachdem man diesen Bogen in 2 gleiche Theile getheilt hat (§. 256), so ziehet man von dem Bogen 0,005, die Bogen von 0,004 (§. 258) und von 0,002 (§. 257) ab, dann hat man die Bogen von 0,001, und von 0,003, mit bloß einem Fehler von einigen Tertien der alten Theilung; sonach hat man alle Bogen, durch die Theilung des Bg. von 0,005 in fünf gl. Th. getheilt, u. theilt man nun auf dieselbe Weise die andere Hälfte des Bogens, so wird er in zehn gleiche Theile getheilt sein.

§. 260. Man kann nun diese Bogen subtrahiren und addiren, so daß die Fehler in mehr und we-

niger sich gegenseitig aufheben, und man genau den tausendsten Theil eines neuen Grades bekommt, man wird also in der Folge den Kreis-Quadranten in 1000 Theilchen oder in Bogen von 10 neuen Minuten getheilt annehmen können. Man wird sie der Einfachheit der Rechnung wegen als genau betrachten.

Aufgabe.

§. 261. Den Bogen einer neuen Minute ohne Fehler von einer alten Tertie zu finden.

Auflösung.

Es sei der Bog. Bz = — 1°30′; die Entfernung az wird die Sehne eines Bogens von 1,3609 sein, ohne einen Fehler von einer alten Tertie. Subtrahirt man nun diesen Bogen von dem von 1,361 (§. 260), so hat man den Bog. von 0,0001.

Beweis. Wenn man in der Gleichung [1] A = — 10 3′ macht, so ist:

$$A' = 122^{\circ}\,28'\tfrac{2}{24}\tfrac{1}{54}\tfrac{1}{4} = 122^{\circ}\,28'\,51''\,36'''$$

= 1,3609 (§. 250). Folgl. u. s. w.

Aufgabe.

§. 262. Den Bogen von zwei neuen Minuten ohne Fehler von einer alten Tertie zu finden.

Auflösung.

Es sei der Bg. Bz = — 48°; die Entfernung bz wird die Sehne eines Bogens von 0,4422 mit der verlangten Genauigkeit sein.

Subtrahirt man nun von diesem Bog. den von 0,442 (§. 260), so wird der übrige Theil gleich sein 0,0002.

Beweis. Wenn man in der Gleichung [2] B = — 48° macht, so ist:
$B' = 39^0\,47'\frac{16}{18}\frac{39}{62} = 39^0\,52''\,48''' = 0{,}4422$ (§. 250).
Also, u. s. w.

Aufgabe.

§. 263. Den Bogen von drei neuen Minuten ohne Fehler von einer neuen Tertie zu finden.

Auflösung.

Es sei ein Bogen Bz = — 78°; aus a, mit der Entf. ez, sei ein Bogen beschrieben, welcher den vierten Theil des Kr. Bf in z' schneidet; dann ist der Bogen Bz' = — 0,0187 mit der verlangten Genauigkeit; und subtrahirt man nun diesen von dem Bg. = — 0,019 (§. 260), dann ist der übrig bleibende Bogen = — 0,0003.

Beweis. Wenn in der Gleich. [9] E = — 78°, so wird der Sinus von A negativ; ändert man die

Zei-

Zeichen in den beiden Seiten der Gleichung, so ist log. sin. A = 8,4678991. Man findet aber in den neuen Tafeln von Callet, für die neue Theilung des Kreises:

8,4678990 = log. sin. 0,0187;

subtrahirt man nun von

log. sin. A = 8,4678991

DS = 6,1960574 (s. Callet),

so bleibt, 2,2718417=log. 187,00004.

Es ist also A = — 0,018700004; der Fehler findet sich noch geringer, wenn man mehr Ziffern in den Logarithmen anwendet.

§. 264. Man hat für die Stellung des Punkts in den drei vorhergehenden Aufg., und besonders in der letztern, eine solche Annäherung, daß man keine größere verlangen kann. Mittelst der durch diese Aufgabe gefundenen Bogen kann man auf verschiedene Arten $\frac{1}{1000}$ des Quadranten (§. 260) in zwei gleiche Theile theilen, d. h. in Minuten der neuen Theilung des Kreises.

§. 265. Man würde auch auf gleiche Weise kleinere Theilungen erhalten können; aber man würde größere Tafeln anwenden müssen, als die, deren ich mich vorzugsweise in den Berechnungen der zwölf vorhergehenden Gleich. bedient habe.

Man könnte auch, wenn man dessen bedürfte,

die Theilung der Periph. über Minuten des neuen französischen Systems hinaus ausdehnen.

Aufgabe.

§. 266. In einem Kreise, dessen Halbmesser AB gegeben, eine Sehne Bb zu finden, welche dem vierten Theile der Peripherie sehr nahe kommt.

Auflösung.

Machet (Fig. 101) in der Periph. BC = CD = DE = AB; dann Ba = Ea = BD; aus C, mit Ca, beschr. einen Bog., welcher die Prph. in b trifft, so ist Bb die gesuchte Sehne.

Beweis. Setzt man AB = 1, und in der Gleich. [1] BC = A = 60°, so ist $A' = 43°33'\frac{286}{2005}$ = Cb. Folgl. ist der Bogen BCb = $103°33'\frac{286}{2005}$. Seine Hälfte, welche = $51°46'\frac{1143}{2005}$ ist, hat zum Sinus 0,7855998.

Die Sehne Bb = 1,5711996; und da nun der vierte Theil der Periph. = 1,5707663, so ist also der Fehler nur ungefähr 0,0004.

§. 267. Aus dem archimedischen Verh. den Halbm. = 1 gesetzt, findet man $\frac{1}{4}$ der Peripherie = $\frac{11}{7}$ = 1,5714. Folglich ergiebt die Construct. der obigen Aufg. (§. 266) eine größere Annäherung.

Da diese Constr. überdieß sehr einfach ist, so ist sie in der Praxis bequemer anzuwenden, als die andern, welche wir auch wohl angeben könnten, aber ob sie gleich der Theorie nach fähig sind, einen größern Grad der Annäherung zu geben, so sind sie auch mehr verwickelt, und folgl. mehr Fehlern unterworfen.

Aufgabe.

§. 268. In einem Kreise, dessen Halbmesser AB gegeben, den Bogen zu finden, welcher sich dem Halbmesser am meisten nähert.

Auflösung.

Machet in der Periph. BLCMFDOEd (Fig. 102)

$$BC = CD = DE = Ed = AB;$$

$$Ba = Ea = BD;$$

$$BF = Db = db = aL = Aa;$$

so wie $FO = AB$; und

endlich $OM = bF$;

so ist der Bog. LM derjenige, welcher sich dem Halbm. am meisten nähert.

Beweis. Wenn man in der Gleichung [4] $A' = 90^0$ macht, aber dieser Bg. zur Sehne AL hat, so ist $BL = A = 20^0\,42'\frac{7}{27}\frac{8}{27}\frac{6}{27}$, da überdieß $OM = bF$ die Sehne des fünften Theils der Peripherie (§. 40), oder von 72^0, und der Bog. $FG = 60$ ist, so ist der Bogen $Fm = 12^0$, und folgl. der Bogen

$LM = BF - BL - FM = 57° 17' \frac{19}{17}\frac{3}{21}\frac{5}{21} = 57° 17' 13'' + \ldots$; es ist also wie bekannt, der dem Halbm. gleiche Bg. $= 57° 17' 44''$. Folglich u. s. w.

Aufgabe.

§. 269. Die Seite eines Quadrats zu finden, welches der Fläche eines Kreises vom gegebenen Halbmesser AB, am nächsten kommt.

Auflösung.

Man mache in der Prph. BPCQDRE (Fig. 103),

$$BC = CD = DE = AB.$$

Mit demselben Halbm. BA, aus B u. E, beschr. die beiden Bog. ALc, AMd; aus C, D, mit dem Halbmesser DB, beschr. die Bogen cNM, dNL; macht

$$BP = PQ = AN;$$

ferner: $QR = LM$,

so ist BR die gesuchte Seite.

Beweis. Wenn man in dem gleichsch. Tr. CND die in μ halbirte Grundl. $CD = 1$ setzt, so

$$CN^2 = C\mu^2 + N\mu^2,$$

oder (§. 2) $= 3 = \frac{1}{4} + N\mu^2$;

folglich $N\mu = \frac{1}{2}\sqrt{11}$; nachgehends hat man

$$Ca^2 = C\mu^2 + A\mu^2;$$

folglich $A\mu = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Es ist also:

$AN = \frac{1}{2}(\sqrt{19} - \sqrt{2}) = 0{,}7922869$;

und eben diesen Werth findet man für die Sehne des

Bogens von $46°40'\frac{12}{26}\frac{72}{71} = BP = PQ$. Es ist also der Bogen $BQ = 93°20'\frac{25}{26}\frac{44}{71}$; ziehet die in n halbirte L. BL, ferner BD, Dn, BE, u. die Perpd. Dδ, Ll, Mm, die zugleich auf derselben Linie BE in δ, l u. m perpendikular sind.

Da nun W. DBE gleich 30° (20. B. 3), so ist: sin. $DBE = \frac{1}{2}$; cos. $DBE = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Es ist demnach zufolge der trigonometrischen Sätze $\cos. DBn = \frac{Bn}{DB}$;

und $\sin. DBn = \frac{Dn}{DB}$,

oder $\cos. DBn = \frac{1}{6}\sqrt{3}$;

und da $Dn = \sqrt{(DB^2 - Bn^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{11}$;

so ist $\sin. DBn = \frac{1}{6}\sqrt{33}$. Nachgehends ist (S. 154)

$\cos. LBl = 6(DBn - DBE) = \cos. DBn \cdot \cos. DBE$

$+ \sin. DBn . \sin. DBE = \frac{1}{12}(3 + \sqrt{33}) = \frac{Bl}{BL} = Bl$

(wo $BL = BA = 1$). Folgl.:

$Al = AB - Bl = \frac{1}{12}(9 - \sqrt{33})$, und demnach: $lm = LM = 2Al = \frac{1}{6}(9 - \sqrt{33})$

$= 0{,}5425729$,

welcher Werth der von der Sehne von $31°28'\frac{15}{27}\frac{18}{99} = QR$ ist. Folgl. ist der Bg. $BQR = 124°49'\frac{63}{74}\frac{70}{76}$; seine Hälfte $= 62°24'\frac{63}{74}\frac{23}{76}$ hat zum Sinus 0,8863283, und folgl. ist die Sehne von $BQR = 1{,}7726566$.

Setzt man den Halbm. = 1, so ist die Kreisfläche = 3,1415926, deren Logarithmus = 0,4971499 ist.

Die Hälfte dieses Logarithmen, d. h.:

$$0{,}2485749 = \log. \sqrt{3{,}1415926},$$

ist der log. 1,772453, der Fehler ist also ungefähr 0,002; welches eine hinreichende Annäherung giebt.

§. 270. Statt AN hätte man die Linien dL oder cM anwenden können, welche man gleich dieser Linie AN finden muß.

Beweis. Ziehet die dL, Dp nach der Mitte p von AN, so ist $\sin. LDp = \frac{Lp}{DL}$. Aber der

$$\text{W. } LDp = \tfrac{1}{2} LDd = \tfrac{1}{2}(BDd - BDL) = 30^0 - BDn,$$

folglich (§. 154):

$$\sin. LDp = \tfrac{1}{2} \cos. BDn = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sin. BDn$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{6}\sqrt{33} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \tfrac{1}{6}\sqrt{3};$$

hieraus $Lp = DL \cdot \sin. LDp = \tfrac{1}{4}\sqrt{11} - \tfrac{1}{4}\sqrt{3}$,

und $Ld = \tfrac{1}{2}\sqrt{11} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = AN$.

Aufgabe.

§. 271. Zu der gegebenen Seite AB eines Quadrats (Fig. 104) den Halbmesser eines Kreises zu finden, welcher der Fläche des Quadrats nahe kommt.

Auflösung.

Aus A, mit AB, beschr. den Halbkr. BCFDLPMEd;

macht BC = CD = DE = Ed = AB, aus B, mit BD beschr. den Bogen dnNDA; aus E, mit demselben Halbm., schneidet diesen Bogen in a; machet BF = Db = db = Aa, und Dn = dN = AB; aus C mit CN, schneidet die Periph. in P: machet PM = Nn, u. CL = FB; so ist LM die gesuchte Seite.

Beweis. Wenn man AB = 1 macht, so ist, da die Seiten des Tr. BNd respective gleich den Seiten des Tr. BDL in der 103. Figur sind:

$$\sin.\tfrac{1}{2}\,dBN = \tfrac{1}{6}\sqrt{3};$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}\,dBN = \tfrac{1}{6}\sqrt{33}\ (\S.\ 270);\ \text{daher:}$$

$$\sin.dBN = 2\sin.\tfrac{1}{2}dBN \cdot \cos.\tfrac{1}{2}dBN\ (\S.\ 154) = \tfrac{1}{6}\sqrt{11};$$

$$\cos.dBN = \sqrt{(1-\sin.^2 dBN)} = \tfrac{5}{6}.$$

Da ferner W. CBd ein R. (31. B. 3), so ist:

$$\cos.CBN = \sin.dBN = \tfrac{1}{6}\sqrt{11}.$$

Aber es ist nach der Trigonometrie:

$$CN^2 = BC^2 + BN^2 - 2\,BC\,.\,BN\,.\,\cos.CBN:$$

folgl.: $CN = \sqrt{(4 - 2\sqrt{3}\,.\,\tfrac{1}{6}\sqrt{11})} = \sqrt{(4-\tfrac{1}{3}\sqrt{33})}$

$= 1{,}4440025,$

und man wird finden, daß dieses die Sehne von $92°\,26'\,\frac{3\,0\,4}{2\,0\,1\,3}$ = CP ist; nachgehends hat man:

$$\sin.NBE = \frac{\frac{1}{2}Nn}{BN} = \sin.(CBE - CBN)$$

$= (\S.\ 154)\sin.60°\,.\,\cos.CBN - \cos.60°\,.\,\sin.CBN$

$= \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,\tfrac{1}{6}\sqrt{11} - \tfrac{1}{2}\,.\,\tfrac{5}{6}$:

es ist also $Nn = 2BN\,.\,\sin.NBE$

$= \tfrac{1}{6}(3\sqrt{11} - 5\sqrt{3}) = 0{,}2149367,$

und man wird finden, daß dieses die Sehne von $12° 20' \frac{246}{2892}$ = PM ist.

Es ist also der Bogen CPM = $104° 46' \frac{4220}{6821}$; subtrahirt man davon den Bogen CL, welcher $\frac{1}{5}$ der Periph. ist (§. 40) = 72°, so bleibt der Bog. LM = $32° 46' \frac{4220}{6821}$, dessen Sehne man = 0,5643274 findet.

Nennt man nun π das Verhältniß der Periph. zum Durchm. des Kr., so ist, wie bekannt, seine Fläche = πR^2; setzt man also $\pi R^2 = 1$, welches die Fläche des Quadrats von Halbm. AB = 1 ist, welchem der Kreis gleich sein soll, so ist:

$$R = \sqrt{\frac{1}{\pi}}, \text{ und}$$

$$\log. R = -\tfrac{1}{2} \log. \pi = -0{,}2485749$$
$$= -1 + 0{,}7514251 = \log. 0{,}5641896:$$

der Fehler wird also noch nicht 0,0002 betragen.

Aufgabe.

§. 272. Aus dem gegebenen Halbmesser AB einer Kugel (Fig. 105) soll man die Seite eines Kubus finden, dessen körperlicher Inhalt der Hälfte von dem der Kugel sehr nahe kommt.

Auflösung.

Man beschr. aus dem Mittelpunkt A, mit dem

Halbmesser AB, die Peripherie BGCDPEd; machet BC = CD = DE = Ed = AB; aus B, mit BD beschr. man den Bog. aDNd; aus E, und mit dem s. Halbmesser dieser Bogen in a geschnitten; machet aG = dN = AB; und CP = CN; PG ist alsdann die gesuchte Seite.

Beweis. In der That hat man (§. 271) CN = Sehne von $92° 26' \frac{804}{2013}$. Nachgehends GC = 15° (§. 32); daher PG = $107° 26' \frac{804}{2013}$; dessen Sehne, wenn man AB = 1 setzt, gleich 1,6122696 ist. Aber bei derselben Voraussetzung, und π als das Verhältniß der Periph. zum Durchm. angenommen, so hat man den körperl. Inhalt der Kugel = $\frac{4}{3}\pi$, und sein Logarithmus = log. 4 + log. π — log. 3 = 0,6220886, dessen dritter Theil 0,2073628 = Log. von 1,611991 ist, und folgl. ist der daraus entstehende Fehler noch keine 0,0003.

Aufgabe.

§. 273. Aus der gegebenen Seite AB eines Kubus (Fig. 106), den Halbmesser einer Kugel zu finden, welcher an Inhalt ihm sehr nahe kommt.

Auflösung.

Aus A, mit AB, beschreibet die Peripherie BLCMFDE; machet:

$BC = CD = DE = AB;$

$Ba = Ea = BD;$ $BF = Aa;$

ferner: $FM = Fa$, und $FL = FA$;

LM ist alsdann der gesuchte Halbmesser.

Beweis. Man hat den Bogen $FL = 60°$ (15. B. 4). Es ist also, wenn man $AB = 1$ setzt, $AF = Aa - AF = \sqrt{2} - 1$ (§. 27) $= 0{,}4142136$ und dieses ist die Sehne von $23° 54' 2\frac{276}{846}$. Es ist daher der Bog. $LM = 36° 5' 1\frac{870}{846}$, dessen Sehne $= 0{,}6195986$. Es ist aber der Inhalt einer Kugel, deren Halbm. R ist, wie bekannt, ausgedruckt durch die Formel $\frac{4}{3}\pi R^3$; setzt man nun $\frac{4}{3}\pi R^3 = 1$, welches der Inhalt des gegebenen Kubus ist, so wäre:

$$\log. R = \frac{\log. 3 - \log. 4 - \log. \pi}{3}$$

$$= -1 + 0{,}7926371 = \log. 0{,}6203504.$$

Folgl. hat man noch nicht 0,0008 zu wenig.

§. 274. Da alle diese Annäherungen in der Rectificirung, der Quadratur und der Kubatur der Periph., des Kreises und der Kugel, und in den umgekehrten Aufg. keinen Fehler von einem Tausendtheil des Halbm. betragen, so betrachtet man sie als hinreichend in der Praxis.

Wollte man die Annäherung noch weiter treiben, so würde dabei nichts anders zu thun sein, als in Graden und Minuten den Bogen zu finden, dessen linearische Größe, welche man sucht, die Sehne ist;

dann zieht man diese Sehne in dem Kreise, nachdem man ihn mittelst der vorher bewiesenen Methoden (§. 235, 243) in die gefundene Zahl von Graden und Minuten getheilt hat.

Aufgabe.

§. 275. Den Kubus durch Annäherung zu verdoppeln.

Auflösung.

Es sei AB die Seite des Kubus, welchen man verdoppeln will (Fig. 107). Man beschreibe aus A, mit AB die Peripherie BQMNCFPDEde, und nachdem man BC = CD = DE = AB; Ba = Ea = BD; BF = Aa; FN = FA gemacht hat; so ist aN, bis auf weniges, die Seite des doppelten Kubus.

Beweis. Der Bogen BN ist $\frac{1}{12}$ der Periph. (§. 31) = 30°; wenn man in der Gleich. [1] diesen Bog. BN = A macht, so ist der Bogen A′, dessen Sehne aN ist, gleich $78° 2' \frac{23584}{6}$. Es ist also, wenn AB = 1 setzt,

$$aN = 2 \sin. 39° 1' \frac{11792}{3846} = 1{,}2592800.$$

Nun ist $\sqrt[3]{2} = 1{,}2599209$.

Der daraus entstehende Fehler beträgt also noch nicht 0,0007 zu wenig.

Auflösung II.

Verlangt man eine größere Annäherung, so ist, nachdem die Constr. nach der ersten Aufl. ausgeführt, und überdem Ed = dc = AB;

BF = Db = db = Aa;

cM = MP = aN; FQ = Fb

gemacht worden; so ist PQ die gesuchte Seite, mit einer größern Annäher., als in der vorhergeh. Aufl.

Beweis. Da nach dem Bew. der ersten Aufl. der Bog. cM = $78° 2' \frac{2}{2}\frac{3}{8}\frac{5}{4}\frac{8}{6}$ = MP, so ist der Bg. cMP = $146° 5' \frac{1}{2}\frac{8}{8}\frac{7}{4}\frac{0}{6}$; subtrahirt man nun den Bog. FQ = 72° (§. 40) vom Bog. FBc = 150° (§. 27, 29), so bleibt der Bogen cQ = 78° übrig; u. subtr. man ihn von dem Bog. cMP, so ist der

Bog. QP = $78° 15' \frac{1}{2}\frac{8}{8}\frac{7}{4}\frac{0}{6}$,

dessen Sehne = 1,259919o.

Der hieraus hervorgehende Fehler ist also nur 0,000019 zu wenig, d. h., kaum der 2 millionste Theil des Halbmessers.

Aufgabe.

§. 276. Den Kubus zu verdreifachen, zu vervierfachen u. s. w., und zu verachtfachen. (Fig. 108.)

Auflösung.

Es sei AB die Seite des gegebenen Kubus. Aus A, mit AB, beschr. man die Peripherie B„G„C„

FLDOEdc; mache darin BC = CD = DE = Ed dc = AB; beschr. aus B, c, d, E, D, mit demselben Halbm. AB, die Bogen Aγc, Aqd, cβAδE, Apd, Aτε; aus B, mit demselben Halbm. BD, beschreibe den Bogen dτδDa; aus E, mit demselben Halbm., schneidet diesen Bog. in a; aus C, D, mit demselben Halbm. beschr., die Bogen cpqE, Bβγd, machet:

BF = Aa; FO = aG = GL = AB;

aω = EL; Bε = γτ;

Bμ = pδ und μν = qτ; dann ist:

AO	die Seite des	doppelten (§. 275)	Kubus.
Cδ		dreifachen	
OG		vierfachen	
Oω		fünffachen	
cε		sechsfachen	
cν		siebenfachen	
BE		achtfachen	

Beweis. Wenn man AB = 1 setzt, so ist (§. 271): $C\delta = V(4 - \frac{1}{3}V33) = 1{,}4422493$. ferner ist: $\sqrt[3]{3} = 1{,}4422493$.

Folglich beträgt das Uebermaß nicht 0,002.

Da nun den Bogen OFG 105° hat (§. 29, 30) so ist seine Sehne

OG = 2 sin. 52° 30′ = 1,5867066.

Es ist ferner $\sqrt[3]{4} = 1{,}5874007$.

Folglich ist das, was fehlt, ungefähr 0,0007.

Nachgehends hat man den Bog. EL $= \frac{c}{24}$ der Periph. (§. 32.) $= 75°$; macht man nun in der Gleich. [4] $A' = 75°$, so ist:

der Bogen $A = B\omega = 32° 27' \frac{27}{24\,54}$;

und da $FO = 60°$ (15. B. 4), so ist der Bogen

$OF\omega = 117° 32' \frac{24\,27}{24\,54}$,

welcher zur Sehne 1,7101744 hat.

Es ist folglich $\sqrt[3]{5} = 1{,}7099757$,

das Uebermaß beträgt folgl. nicht 0,0003.

Da nun $BD = B\tau = D\pi = \sqrt{3}$,

und $D\tau = B\pi = 1$, so ist (§. 23):

$\pi\tau \cdot BD = BD^2 - B\pi^2$,

d. h. $\pi\tau \cdot \sqrt{3} = 2$;

daher $\pi\tau = \frac{2}{3}\sqrt{3} = 1{,}1547005$,

welches die Sehne von $70° 31' \frac{17\,25}{23\,75}$ ist.

Man hat also den Bog. $cB\varepsilon = 130° 31' \frac{17\,25}{23\,75}$, dessen Sehne $= 1{,}8164964$ ist. Nun ist $\sqrt[3]{6} = 1{,}8171204$. Folgl. macht man hier einen Fehler, der noch nicht um 0,0007 zu wenig ist.

Da die Seiten in den beiden Tr. $Cd\mathfrak{p}$, $Bp\delta$ respective einander gleich sind, so sind die Tr. congruent (8. u. 26. B. 1); und da sie beide dieselbe Grundl. $p\delta$ haben, so sind $p\delta$, BC unter sich prll. (39. B. 1). Es ist also der W. $CB\delta = Bd\mathfrak{p}$ (27. B. 1). Folgl. $\cos. CB\delta = \frac{1}{6}\sqrt{11}$ (§. 271) $= \cos. Bd\mathfrak{p}$. Nach der Trigon. ist: $Bp^2 = B\delta^4 + p\delta^2 - 2B\delta \cdot p\delta \cos. Bd\mathfrak{p}$;

und da die L. Bp u. Cδ gl. sind, weil man sie durch dieselbe Constr. bestimmt, so ist:

$$4-\tfrac{1}{3}\sqrt{33}=3+p\delta^2-2p\delta.\sqrt{3}.\tfrac{1}{6}\sqrt{11};$$

daher: $1-\frac{1}{3}\sqrt{33}=p\delta^2-p\delta.\frac{1}{3}\sqrt{33}$: addirt man auf beiden der Gleich. das Quadrat von $\frac{1}{6}\sqrt{33}$, so ist: $(1-\frac{1}{6}\sqrt{33})^2=(p\delta-\frac{1}{6}\sqrt{33})^2$; daher $p\delta-\frac{1}{6}\sqrt{33}=\pm(1-\frac{1}{6}\sqrt{33})$. Nachgehends hat man (§. 23) $p\delta.dE=dE^2-pd^2$, d. h. $p\delta=1-pd^2$, u. folgl. ist die L. $p\delta$ kleiner als die Einh.; nun bestimmt man $p\delta=\frac{1}{3}\sqrt{33}-1=0{,}9148541$, welche die Sehne des Bg. von $54^\circ 26'\frac{1408}{2588}$ ist. Ferner ist $q\tau=LM$ in Fig. 103 = der Sehne des Bg. von $31^\circ 28'\frac{2518}{2799}$ (§. 269). Es ist folglich der Bg. $cB\mu\nu=60^\circ+54^\circ 26'\frac{1408}{2588}+31^\circ 28'\frac{2158}{2799}=145^\circ 55'\frac{1607}{3622}$, dessen Sehne $c\nu=1{,}9122214$. Nun ist $\sqrt[3]{7}=1{,}9129309$. Es entsteht daher ein Fehler, der nicht um 0,000702 zu wenig ist; endlich ist $BE=2=\sqrt[3]{8}$. Folgl. u. s. w.

Aufgabe.

§. 277. Den Kubus durch Annäherung zu halbiren (Fig. 108).

Auflösung.

Es sei AB die Seite des gegeb. Kubus; aus A, mit AB, beschr. die Prph. BCDEd, u. machet BC = CD = DE = Ed = AB; aus B, mit BD, ziehet den Bg. Dδd; aus d, mit dA, den Bg. AδE; dann ist Dδ die gesuchte Seite.

Bew. Die gr. L. D♂ in dieser Fig. ist wie dL in Fig. 103 bestimmt worden. Es ist daher (§. 269) D♂ = 0,7922869. Nun ist aber $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ = 0,7937039. Der Fehler ist also noch nicht um 0,002 zu wenig.

§. 278. Wir haben die Aufl. dieser beiden letztern Aufg. nicht übergehen wollen, obgleich darin bei manchen Result. ein Fehler statt findet, nämlich: von 0,001, oder 0,002, in den einen, u. von einigen zehntausend Th. in den andern, weil diese Fehler oft zu vernachlässigen, und überdieß die Aufl. davon einfach sind.

Man kann viel genauere Werthe als die vorherg. haben, um Kubi, nicht allein in den oben ausgedr. Verh. zu bilden, sondern auch in andern, wenn man die in Graden, Minuten u. Th. von Minuten ausgedr. Bg. suchte, welche als Sehnen die Kubikwurz. haben, oder ihre Hälften, Drittheile ꝛc., die zur Constr. des gesuchten Kubus nöthig sind; man würde nachgeh. diese Sehne aus den genau in Grade, Minuten ꝛc. (§. 243, 244) getheilten Kr. entnehmen, u. sie alsdann so wie ihre Vielfachen zu derselben Constr. des Kubus anwenden.

§. 279. Hier endigt sich nun die Geom. d. Zirkels: wird sie von den Geomet. gut aufgenommen u. ist sie Künstlern, Zeichnern u. namentl. Verfertigern mathem. Instrum. zum Gebrauch der Geopraph. u. Astron. von einigem Nutzen, so würde ich mich für die ermüdende Anstreng. die mich ihre Bearbeit. kostet, sehr belohnt finden.

Inhalt.

Inhalt.

		Seite.
Buch 1.	Vorerinnerungen	1
— 2.	Von der Theilung der Kreisperipherie und der Kreisbogen	16
— 3.	Von der Vervielfältigung und Theilung geradliniger Entfernungen . . .	38
— 4.	Von der Addition und von der Subtraction der Entfernungen; von der Lage der Perpendikel und der Parallelen . .	54
— 5.	Von den proportionalen Entfernungen .	66
— 6.	Von den Wurzeln	75
— 7.	Von den Durchschnitten gerader Linien mit Kreisbogen und unter sich . .	95

Seite.

Buch 8. Von der Construktion, Vervielfältigung und Theilung der Winkel und den trigonometrischen Linien 101

— 9. Von den ähnlichen Figuren und den regulären Polygonen 112

— 10. Von den Mittelpunkten 139

— 11. Verschiedene Aufgaben 148

— 12. Aufgaben durch Annäherung aufgelöst . 212

Gebrauch und Theorie

des

Proportionalzirkels

von

J. P. Gruson.

Erstes Kapitel.

Construktion des Proportionalzirkels.

Der Proportionalzirkel, den die Engländer Sector nennnen, ist schon sehr lange bekannt. Don Henrion, in seiner Beschreibung dieses Zirkels, welche 1616 erschienen, sagt, daß er im Jahre 1598 einen kleinen Zirkel mit Spitzen gefunden habe, auf welchem nur zwei Linien waren, zu welchen er achte mit Weglassung der Spitzen zugesetzt hat. Georg Adams sagt in seinem geometrischen und geographischen Versuche oder Beschreibung der mathematischen Instrumente, London 1791, ins Deutsche übersetzt von Geißler, Leipzig 1795: Von allen erfundenen mathematischen Instrumenten, um die Kunst des Zeichnen zu erleichtern, ist keins von so ausgedehnter, allgemeiner Anwendung, als der Proportionalzirkel. Es ist ein Universalmaßstab, sowohl für Winkel als Parallelen, so daß er das Lineal und den Zirkel, die einzigen Mittel, deren die Geometrie zum Ausmessen in

der Theorie und Praxis in sich faßt. Der wahre Erfinder dieses schätzbaren Instruments ist unbekannt geblieben, indessen hat man den Werth dieser Erfindung doch bald schätzen müssen, da Galilei und ganze Nationen sich diese Ehre zueignen wollen.

Dieses Instrument scheint bei den Engländern mehr als bei andern Nationen im Gebrauch zu sein, der Grund liegt wohl in der Genauigkeit der Theilung, die eigentlich den Werth des Zirkels bestimmt.

Der englische Proportionalzirkel oder Sector besteht aus 2 messingenen Linealen AB u. AC (Fig. 1), 6 Zoll lang, 9 Linien breit und 1½ Linie dick. Das Lineal AB hat zwei kreisförmige Platten oder Backen, die mit ihm ein Ganzes ausmachen: diese Backen umfassen eine andere kreisförmige Platte, von gleichen Durchm., und auf der Mitte der Dicke des Lineals AC befestiget. Durch diese drei Stücke geht eine innere Axe, um welche sie sich frei drehen lassen. Die Theile apq und a'mn der Lineale AC und AB sind in ihrer Dicke kreisförmig geschnitten, um die Backen und dem mittlern Stück den Durchgang zu verstatten.

In a'cc' (Fig. 2) sieht man ein Stücks des Zirkels, welches mit dem Lineal AB ein Ganzes ausmacht, und in ac' ein kleiner mit c'ca concentrischer Kreis. In (Fig. 1) umfaßt dieser kleine Bogen den ersten, und gleitet beim öffnen der Lineale über ihn

weg. Dieselbe Einrichtung ist auch auf der andern Seite. Die Dicke dieser kleinen Kreisstücke ist auf den Theil genommen, welcher von dem Lineal übrig bleibt, nachdem man die drei eben beschriebenen Kreisplatten übereinander gelegt hat; überdem ist der Durchm. von c'ca' sehr klein, und der Bogen c'a ist nur $\frac{1}{3}$ vom ersten. Der Vortheil dieser Einrichtung ist also die Friktion zu vermindern, welche den Gebrauch der andern Zirkel sehr erschwert, auch, wenn man eins der Lineale Lothrecht hält, das andere schief stehende Lineal sich von selbst dem Lothrechten nähere.

Dem Proportionalzirkel hat man ein äußerst dünnes metallenes Lineal zugesellt, dessen ein Ende in einer in der Dicke des Lineals in der Richtung nn, angefertigten Rinne steckt, wo es in f durch eine Axe festgehalten und um dies. gedreht werden kann; der größte W. von diesem Lineal mit AB ist 90°, so, daß dieser Z. als Winkelmaß dienen kann. Eben so hat man in der Dicke des Lineals AC eine Rinne gemacht, um das Ende f' aufzunehmen: wenn also zwei Theilungen und ihre Transversale-Entfernung gegeben sind, und man will die Transversale-Entfernungen von zwei anderen bekannten Theilungen abnehmen, so steckt man den Endpunkt f' von FF' in seiner Rinne, dann stößt oder zieht man dieses Lineal, indem man auf die Dicke m'B drückt, bis die beiden ersten Theilungen in der gegebenen Entfernung sind, und nimmt alsdann zwi-

schen den Spitzen eines Zirkels die gesuchte Weite der beiden andern Theilungen, ohne zu befürchten, daß die Oeffnung abnehme, weil alsdann die beiden Lineale AC und AB durch das dritte zurückgehalten werden, und dieses stark genug in seiner Rinne geklemmt ist, damit der Winkel sich nicht ändert. Man sieht, daß wenn die Rinne bis ans Ende des Lineals verlängert wäre, man den Zirkel für kleine nach den Endpunkten C u. B hin zu nehmenden Transversal-Weiten nicht hätte fest stellen können; deshalb hat man das Lineal AC von C aus beinahe auf ein Zoll schräg abgeschnitten, damit man AC dem AB so nahe als man will bringen kann, wo ff' rechtwinklig auf AC ist.

Die auf den Seitenflächen des Proportionalzirkels gezogenen Linien sind:

auf der einen Seitenfläche (Fig. 3)

1. zwei Linien mit gleichen Theilen, die arithmetische Linie genannt, sie ist mit lig. bezeichnet;
2. zwei Sehnenlinien, bezeichnet durch cor.
3. zwei Secantenlinien, bezeichnet durch sec.
3. eine Polygonlinie, bezeichnet durch pol.

Auf der andern Seitenfläche:

1. zwei Sinuslinien, bezeichnet durch sin.;
2. zwei Tangentenlinien, bezeichnet durch tang.;

5. zwischen der doppelten Sinusl. u. der doppelten Tangentenlinie befindet sich eine andere mit tang. bezeichnete Tangentenlinie, für einen kleinern Halbmesser. Diese letztere geht von 45° bis 75°, und ergänzt die geringe Ausdehnung der andern.

Jedes Paar von Linien, ausgenommen die der Polygone, ist so gestellt, gleiche Winkel am Mittelp. zu bilden, welches auch immer die Oeffnung des Zirkels sein mag, so, daß die Weite der Num. 10 von den arithm. Linien gl. ist der Weite der Num. 90 von der Sinuslinie, der Num. 60 von der Sehnenlinie, der Num. 45 von der Tangentenlinie.

Außer diesen Linien sieht man noch andere mit den Kanten des Proportionalzirkels parallel gezogen, als;

Auf eine der Seitenflächen,

1. eine Zolllinie;
2. eine Breitenlinie;
3. eine Stundenlinie.
4. eine Neigungslinie des Meridians.

Und auf der andern Seitenfläche:

Drei Logarithmischelinien, eine Zahllinie, eine Sinuslinie und eine Tangentenlinie. Der Gebrauch dieser Linien fordert, daß der Prop.-Z. ganz geöffnet ist, d. h., daß die beiden Lineale ein einziges Lineal ausmachen.

Der Prop.-Z. (Fig. 4), genannt Butterfield, hat nur drei von diesen Linien: 1) die arithmetische, 2) die der Chorden, 3) die der Polygone, und diese letztere ist doppelt: aber man findet darauf eine Linie der Ebenen, eine Linie der Körper, und mit den Kanten prll. eine Linie von dem Kaliber des Geschützes, eine Linie von dem Gewicht der Kugeln, und endlich eine Linie der Metalle.

Zweites Kapitel.

Erklärung und Construktion der arithmetischen Linie.

Linea partium aequalium.

Die arithmetische Linie, dient einer gegebenen Linie in gleiche Theile zu theilen; zu einer Linie Theile hinzusetzen, oder deren eine beliebige Anzahl davon abzunehmen; eine ebene Figur auf dem Papier zu zeichnen; die Länge der Seiten einer ebenen Figur zu finden, wenn man die Länge von einer Seite kennt, z. B. die Anzahl Ruthen von einer Courtine, von einer Face, von einer Flanke, u. s. w., wenn man die Länge von einer Seite des Polygons, oder von der Vertheidigungslinie hat.

Die arithm. Linie enthält auf eine Länge von

6 Zoll 200 gleiche Theile; jeder dieser Theile ist also = 0,36 Linien: um sie mit aller erwünschten Genauigkeit zu zeichnen, könnte folgendes Verfahren dienen.

Auf ein hölzernes Lineal BF (Fig. 5) von 7 bis 8 Zoll lang, und von gleicher Breite mit einem der Lineale des Prop.-Z., leimt man ein 6 Zoll langen Streifen Papier BD, den man in 20 gleiche Theile theilt; nachdem dieses Lineal mit AB so gelegt ist, daß ihre Enden genau zusammenstoßen, und die Hauptlinien AB und BD eine einzige gerade Linie bilden, so setzt man eine von den Spitzen eines Stangenzirkels in den Punkt D, und entfernt davon die andere Spitze um die Weite Dm, wo m der Ort von Num. 200 der arithm. Linie ist: werden nun die beiden Spitzen festgestellt, so setzt man die erste Spitze in 10, und durchschneidet mit der andern AB, dieses giebt Num. 190; dann setzt man in 20 ein, u. bestimmt 180; dann in 30, und erhält 170; u. s. f. Sind diese primitiven Theilungen ausgeführt, so bleibt übrig, jede von ihnen in 10 gleiche Theile zu theilen, d. h., AB in 200 gleiche Theile. Dazu bedient man sich mit Vortheil eines Stangenzirkels mit einem Micrometer.

Anmerk. Da der Stangenzirkel mit Micrometer nicht allgemein bekannt ist, so mag folgende Andeutung genügen: der Kopf der Schraube hat einen Zeiger, dessen Spitze während der Umdrehung der Schraube einen

Kreis beschreibt; dieser Kreis ist in gleiche Theile getheilt, und jeder von diesen Theilen giebt einen proportionalen Theil von der Höhe des Schraubenganges an. Angenommen, die Höhe eines Schraubenganges sei $\frac{1}{4}$ Linie, und der gedachte Kreis enthalte 25 gleiche Theile, wenn nun der Zeiger einen solchen Theil durchlaufen hat, so hat die Schraubenmutter und der mit ihr verbundene Körper $\frac{1}{100}$ Linie gemacht, eine solche Länge ist also angebbar gemacht, die unmittelbar auszumitteln vielleicht unmöglich ist.

Da man im Folgenden oft eine Anzahl Zolle und Linien in Theile der arithm. Linie ausdrücken muß, so wird folgende Reductionstafel willkommen sein.

Zoll.	Lin.	Werthe in Theilen der arithm. Linie.	Linien.	Werthe in Theilen der arithm. Linie.
6		200,00	8	22,22
5		166,66	7	19,44
4		133,33	6	16,66
3		100,20	5	13,88
2		66,66	4	11,11
1		33,33	3	8,33
0	11	30,54	2	5,55
0	10	27,76	1	2,77
0	9	24,99		

Z. B. wie viel betragen 2 Zoll, 7,8 Linien in Theilen der arithm. Linie?

Auflösung. 2 Zoll = 66,66,
7 Linien = 19,44,
0,8 Linien = 2,222
folgl. 2 Zoll 7,8 Linien = 88,322.

Gebrauch der arithmetischen Linie.

1. Aufg. Eine gegebene Linie in so viele gleiche Theile als man will zu theilen.

Aufl. Es sei n die Anzahl der gleichen Theile, welche man auf der gegebenen Linie anzeigen will: man wählt zuerst auf der arithm. Linie eine durch n theilbare Zahl, und öffnet den Prop.-Z. so, daß die Transversal-Weite von dieser Zahl, zu der ihr gleichen der zu theilenden L. gl. ist, die Weite zwischen den zwei Quotienten dieser Zahl durch n, ist der gesuchte nte Theil der gegebenen Linie.

Beispiel. Es sei n = 5, u. wenn AB u. AC (Fig. 6) die doppelte A. L. (arithm. Linie) vorstellen, so könnte man die Zahlen 200 nehmen, die durch 5 dividirt 40 giebt, und macht nun die Weite von 200 zu 200 gleich FG, so ist die Weite DE von 40 zu 40 = $\frac{1}{5}$FG.

Beweis. Die zwei ähnl. Tr. ABC, ADE, geben

AD : AB = DE : BC;

aber AD = $\frac{1}{5}$AB; folgl. DE = $\frac{1}{5}$BC.

Man hätte kleinere Zahlen als 200 nehmen können, aber alsdann hätte man eine größere Oeffnung des Prop.-Z. gehabt, welches in der Praxis weniger bequem ist.

Wäre die gegebene Linie zu lang, so könnte man etwa $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$ davon zur Transversale nehmen; aber alsdann müßte man das Dreifache, das Vierfache u. s. w. von der Linie DE nehmen, um den 5ten Theil von der Linie FG zu haben.

2. Aufg. Eine Linie in zwei Theile zu theilen, die unter sich in einem gegebenen Verhältniß stehen.

Aufl. Es seien n und m die zwei Glieder der Verhältnisse; man öffnet den Prop.-Z., so, daß die Transversalweite der Zahlen $n+m$ gleich der gegebenen L ist, alsdann sind die beiden Theile von dieser Linie durch die, dieser Oeffnung entsprechenden Weiten, n zu n und m zu m gegeben.

Beisp. Es sei $n = 40$, $m = 70$, $FG = 165$ (Fig. 7) die zu theilende Linie, so ist $m+n = 110$; macht man nun die Weite von 110 zu 110 $=$ FG, so findet man 60 für die Weite von 40 zu 40, und 105 für die von 70 zu 70: und wirklich ist

$$40 : 70 = 60 : 105.$$

Bew. Wenn BAC die doppelte A. L. vorstellt,

B u. C die Stellen der Nr. m+n,
D u. E " " " " n und
F u. G " " " " m,

so hat man, wegen der Aehnlichkeit der Triangel ADE, ABC,

AD : AB = DE : BC,

und AD : AB — AD (BD) = DE (IC) : BC — DE (BI);

daher n : n + m — n (m) = IC : BI.

Andererseits hat man:

AD : AF = DE : FG,

oder n : m = IC : FG;

folglich FG = BI.

Wenn die beiden Glieder der gegebenen Verh. Brüche sind, so muß man sie zuerst unter einerlei Nenner bringen, und statt dieser Brüche die Zähler nehmen.

Endlich wenn die beiden Glieder der gegebenen Verhältnisse irrationale Zahlen wären, wie $\sqrt{5}$ und $\sqrt{3}$, so zieht man zuerst daraus die Wurzel bis auf 100 Theilchen, welches die Zahlen 2,23 und 1,73 giebt, und verfährt mit 223 und 173, wie oben gelehrt worden.

Soll man eine Linie FG den drei Zahlen 20, 30, 50, deren Summe = 100, proport. Theilen, so macht man die Transversalweite von 100 zu 100 gleich der gegebenen Linie, und nimmt die Weite von 20 zu 20 und 50 zu 50, und trägt sie von F

aus auf FG ab, hierdurch wird FG in drei Theile getheilt, die in dem gegebenen Verhältniß stehen.

Allgemeine Auflösung.

Allgemein: um eine Linie in einer Anzahl Theile zu theilen, die sich unter sich verhalten, wie

$$m : n : p : q : r,$$

so muß man die Summe

$$n + m + p + q + r = S$$

machen; nun den Prop.-Z. so öffnen, daß die Transversalweite der No. S gl. der gegeb. L. sei, nimmt nun die Weiten der Zahlen n, n+m, n+m+p, n+m+p+q, und trägt sie auf die zu theilende Linie immer von ihrem Anfangspunkt an auf. Die so auf dieser Linie bestimmten Theile werden unter sich in dem verlangten Verh. stehen. Man überführt sich davon, wenn man diese Abschnitte auf die A. L. vom Anfangspunkte an aufträgt, denn wenn die Zahlen, von diesen Theilen, mit den gegebenen Zahlen eine Folge von gleichen Verhältnissen bildet, so ist dieses eine Probe, daß die Operation richtig gemacht ist.

3. Aufg. Wenn man die Anzahl der gleichen Theile, welche eine Linie enthält, kennt, zu finden, wie viel solcher Theile eine andere Linie enthält (Fig. 8).

Aufl.

Aufl. Es sei n die gegebene Anzahl, und n' die gesuchte Anzahl; nachdem man den Prop.-Z. so geöffnet hat, daß die Weite der Zahlen n gleich der ersten Linie, so sucht man zwei Theilpunkte, die einerlei Num. haben, und deren Transversalweite der 2ten Linie gleich ist, und diese Num. ist der Werth von n', d. h., die gesuchte Anzahl gleicher Theile.

Beisp. Gesetzt die Linie FG, als innere Seite eines befestigten Polyg., enthält 120 gleiche Th., deren jeder eine Toise, und man verlangt die Anzahl Toisen von der halben Kehllinie FH; wenn BAC immer die doppelte A. L. vorstellt, B, C die Stellen der Zahlen 120; nachdem BC = GF gemacht, so ergiebt sich, daß die L. FH für diese Oeffnung des P. Z., die Weite zwischen der No. 26 ist; wenn also die innere Seite 120 Toisen hat, so hat die halbe Kehllinie FH deren 26.

Beweis. Die ähnl. Tr. ABC, ADE geben:

AB : AD = BC : DE.

Welches anzeigt, daß DE eben so viel Theile von BC, als AD deren von AB, enthält. Dasselbe Verfahren wird die Anzahl Toisen von einer Face, von einer Flanke, von einer Courtine, ꝛc. geben, welche der gegebenen Länge einer innern Seite entspricht, und umgekehrt.

Wir haben in der ersten Aufgabe gesehen, wie man sich verhalten soll, im Falle die gegebene Linie

eine zu große Oeffnung des Proportional-Zirkels erfordert.

Eben so würde man die Anzahl der gleichen Th. aller Seiten vom Umfange eines Polygons finden, von welchem eine der Seiten eine gegebene Anzahl gleicher Theile enthält; denn wenn man den Prop.-Z. so geöffnet hat, daß diese Seite die Transversalweite der Nummern, welche ihre Länge ausdrücken, ausmacht, so stellt man die Länge von jeder der andern Seiten, der ersten parll. zwischen zwei gleichen Nummern, und diese Zahlen sind alsdann die in den Umfangsseiten enthaltenen gleichen Theile.

4. Aufg. Die Anzahl der gleichen Theile, welche eine Linie enthält, sind bekannt, man soll eine beliebige Anzahl dieser Theile davon abschneiden.

Aufl. Es sei noch die Linie FG = 120 Ruthen gegeben, von welcher 26 abgeschnitten werden sollen. Diese Aufg. ist die umgekehrte der vorhergehenden: denn, in jener, war die Weite zwischen zwei Nummern gegeben, und es mußten diese Nummern gefunden werden, statt daß hier die beiden Nummern gegeben sind, und es bleibt nur deren Weite zu nehmen, die man nachgehends von der Linie FG abschneidet.

Anmerk. Man sieht, daß die A. L. als Maßstab zu einer Karte dienen kann, wenn man nur die Anzahl gleicher Theile von einer Linie dieser Karte weiß. Man kann demnach auch, mittelst dieser Linie und der vorhergehenden Prinzipien, eine Karte zeichnen, oder eine nach einem gegebenen Verhältniß reduciren.

5. Aufg. Durch Näherung eine gerade Linie zu finden, die gleich einer Kreisperipherie deren Durchmesser gegeben ist.

Aufl. Wenn das Verhältniß des Durchm. zur Prph. = 100:314, oder 50:157 genommen wird, so öffnet man den Prop.-Z., so daß die Weite der No. 100 gleich dem gegebenen Durchm., alsdann ist die Weite der No. 157 die gesuchte Linie.

Umgekehrt: wollte man den Durchm. eines Kreises finden, dessen Peripherie gleich einer gegebenen Linie wäre, so macht man die Weite der No. 157 gleich dieser Linie, und die der No. 50 wäre alsdann der gesuchte Durchmesser.

6. Aufg. Den Proportionalzirkel so zu öffnen, daß die doppelte A. L. einen rechten Winkel bilden.

Aufl. Es sei die Gleichung $x^2 = a^2 + b^2$, so hat man:

$$x^4 = (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2.$$

Man mache also von zwei beliebigen Zahlen die Quadrate; so ist ihre Differenz, die auf einer A. L. vom Mittelpunkt aus zu nehmenden gleichen Theile, und das doppelte Produkt dieser zwei Zahlen giebt die Zahl der auf der andern A. L. zu nehmenden Theile an; macht man nun die Summe dieser Quadrate, so hat man die Weite, welche der oben bestimmten Linie gegeben werden muß, damit die doppelte A. L. einen rechten Winkel bildet.

Für a und b muß man Zahlen wählen, deren Summe kleiner als 200 ist.

Beisp. Es seien $a = 12$, $b = 6$; so ist

$$a^2 - b^2 = 108,$$

$$2ab = 144,$$

und $x^2 = 180$;

wenn man also die Weite der Nummern 108, 144 gleich 180 macht, so bildet die doppelte A. L. einen rechten Winkel.

Allgemeine Auflösung.

Es soll überhaupt der Prop. Z. so weit geöffnet werden, daß die doppelte A. L. einen beliebigen gegebenen Winkel bildet.

Man betrachte die A. L. als den Sinus totus und suche, für diesen Halbm., die Anzahl der in dem Sinus von der Hälfte des gegebenen Winkels

enthaltenen Theile, und stelle die No. 200 in dieser Weite, so hat man den verlangten Winkel.

Beweis. Es seien AB und AC (Fig. 9) die doppelte A. L.: B und C die Stellen der No. 200, F und G die der No. 100, und BAC der gesuchte Winkel; wegen $AF = \frac{1}{2}AB$, hat man:

$$FG = \frac{1}{2}BC = \sin.\frac{1}{2}BAC.$$

7. Aufg. Zu drei gegebenen geraden Linien eine vierte Proportionale zu finden.

Aufl. Nachdem zwei von den gegebenen Linien vom Mittelp. A aus, auf der A. L. abgetragen, so schreibe man die den Endp. dieser Linien entsprechenden No. auf, nun öffne man den Prop.-Z. so, daß die Weite zwischen der ersten Nummer und der ihr gleichen der dritten Linie gl. wird, so giebt die Weite zwischen der zweiten Nummer und der ihr gleichen die gesuchte vierte Proportionale.

Beisp. Es seien HI, KL, MN die gegebenen drei Linien, BAC die doppelte A. L. Man trägt HI und KL aus A auf AB, deren Endpunkte in D und B fallen, die der No. 15 u. 20 zusagen, auf der andern A. L. nimmt man die P. E u. C von derselben No.; nun öffnet man den Prop.-Z. so, daß die Weite DE gleich der Linie MN, so giebt die Weite BC die gesuchte vierte Proportionale.

Der Bew. ist wie er schon mehrmal gegeb. worden.

Es ist einleuchtend, daß man die dritte Linie MN statt der zweiten nehmen kann, und umgekehrt, denn hierdurch werden nur die Stellen der mittlern Glieder in der Proportion verändert.

Anmerk. Sollten diese zwei ersten Linien zu lang sein, so könnte man die Hälfte, das Drittel, das Viertel ꝛc. derselben auftragen, und man hätte immer dieselbe vierte Proportionale: weil das Verhältniß sich nicht ändert, wenn seine beiden Glieder mit einerlei Zahl dividirt werden. Aus denselben Gründen könnte man sich auch der Hälfte, $\frac{1}{3}$. ꝛc. der Linien HI, MN bedienen. Wenn die dritte Linie eine zu große Oeffnung des Prop.-Z. erforderte, so würde man nur ein Bruchtheil davon auftragen, alsdann aber müßte man die vierte Proportionale so viel mal nehmen, als der Nenner dieses Bruches anzeigte.

Zusatz. Mittelst des Gesagten könnte man folgende Aufgaben lösen.

1. Zu drei ähnlichen Figuren eine vierte ähnliche zu finden.

Denn da die Verhältnisse zwischen diesen Fig. durch die Quadrate der homologen Seiten oder zwischen den Seiten selbst dargestellt werden können, so sieht man, daß alles darauf hinläuft, zu drei gegebenen Linien eine vierte Proportionale zu finden.

2. Ueber eine gegebene Linie, eine, einer andern gegebenen ähnliche, Figur zu zeichnen.

Diese Construktion verlangt auch das Aufsuchen einer vierten Proportionale.

3. Eine Linie zu vervielfachen, z. B. viermal zu nehmen.

Da ein Produkt eine vierte Proportionale zur Einheit, zum Multiplicator und zum Multiplicandus ist, so nimmt man auf die A. L. zwei Num., von denen die eine das Vierfache der andern ist, wie 20 und 80; nun öffnet man den Prop.-Z. so, daß die Weite von der ersten dieser Num. zu der ihr gleichen, gleich sei der gegebenen Linie, so ist die Weite der zweiten Num. zu der ihr gleichen die gesuchte Linie.

4. Eine gegebene Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, z. B. in 4 gleiche Theile.

Man hat immer diese Proportion: die Einheit zum Dividendus, wie der Divisor zum Quotienten. Man bestimmt also die Oeffnung des Prop.-Z., indem man die Weite der vierfachen Summe gleich der gegebenen Linie macht, alsdann giebt die Weite der andern Num. zu der ihr gleichen die gesuchte Linie.

5. Zu zwei gegebenen Linien eine dritte Proportionale zu finden.

Denn dieses ist nur eine vierte Proportionale zu drei Linien, von welchen zwei gleich sind. Wir übergehen hier mehrere andere Aufg., welche die Aufsu-

chung einer vierten Proportionale erfordern; es genügt uns, diejenigen angezeigt zu haben, die weniger direkt davon abzuhangen scheinen.

8. Aufg. Wenn zwei Linien VL und AB, die nach einem unzugänglichen Punkt q hinlaufen, der Lage nach nebst einem Punkt e gegeben sind, so soll man durch diesen Punkt eine Linie ziehen, die auch nach dem Punkt q läuft.

Aufl. Der Punkt e kann zwischen den beiden Linien oder außerhalb derselben gegeben sein.

Erster Fall. Durch den gegebenen Punkt e (Fig. 11) zieht man in einer beliebigen Richtung eine gerade Linie, welche die beiden andern in a und v schneidet, nun zieht man durch einen auf AB in beliebiger Entfernung (je größer je besser) von a genommenen Punkt b eine Parallele bl zu av: ist dieses geschehen, so sieht man, daß alles darauf ankommt, in lb einen P. x so zu bestimmen, daß die Linie ex verlängert auf den Punkt q stößt. Dieserhalb, wenn die doppelte Al. so weit geöffnet worden, daß die Weite der No. 100 gleich av ist, so sucht man für diese Oeffnung zwei identische Nummern, deren Weite gl. ev ist; ich nehme an, daß die No. 60 dieser Bedingung genügen, macht man nun 100 zu 100 = lb,

und die corresp. Weite der No. 60, von 1 aus, auf lb getragen, wird den gesuchten P. z geben.

Zweiter Fall. Nachdem die Construktion wie im ersten Fall gemacht worden, nimmt man 100 zu 100 = ev, und angenommen, daß alsdann die Nummern 72 von einander um av entfernt liegen, so macht man 72, 72 = lb, und die correspond. Weite der Nummern 100 von l aus auf lb abgetragen, wird den Punkt x geben, so daß ex verlängert durch q geht.

Diese Operation gründet sich auf die Gleichheit der Verhältnisse

$$\frac{av}{ev} = \frac{bl}{lx} \text{ u. } \frac{va}{ve} = \frac{lb}{lx},$$

Diese Aufgabe ist bei vielen geom. Operationen von großem Gebrauch, und hauptsächlich in der Perspective; denn man kann VL als eine Verschwindungslinie, und die beiden andern Linien als Bilder auf einem Gemälde ansehen, so daß man auf einem Gemälde ein gegebenes Bild hat, welches seine Richtung nach einem unzugänglichen Verschwindungsp. nimmt, so könnte man, wenn man will, Bilder von andern Linien ziehen, die alle nach demselben P. laufen.

9. Aufl. Einen Maßstab in der Proportion von $\frac{1}{25}$ zu zeichnen, d. h., der so beschaffen ist, daß 25 Theile auf dem Terrain, durch

einen Theil auf dem Papiere vorgestellt werden (Fig. 13).

Aufl. Soll der zu zeichnende Maßstab in Fuße und Zolle sein, so macht man die Weite der Nummern 100 auf der A. L. gleich einen Zoll, alsdann giebt die Weite der Nummern 48 die Länge des Fußes für die Karte, und diese Länge von A in 1; von 1 in 2, ꝛc. und von 11 in B getragen, theilt AB in 12 Fuß: um Zolle zu haben, verlängert man BA um Aa = A1, nimmt dann A2, und macht daraus eine Transversalweite zwischen den Nummern 9; trägt die Weite der Nummern 6 von b nach A, welches einen Punkt e giebt, alsdann trägt man dieselbe Länge 6,6 von 1 und von e nach a, und erhält die P. g und n, welche Ag = gn = na geben. Es bleibt nur noch übrig, diese Linien in 4 gleiche Theile zu theilen, welche für jeden Theil durch eine doppelte Halbirung geschieht.

Beweis. Da ein Zoll auf dem Terrain durch $\frac{1}{25}$ des Zolles auf dem Papiere vorgestellt werden soll, und man denkt sich dieses Maß in 25 gleiche Theile getheilt, so wird der Fuß auf dem Maßstabe 12 von diesen Theilen enthalten; dieses ist in der That das 4te Glied in der Proportion.

$$100 : 25 = 46 : x = \frac{1200}{100} = 12.$$

10. Aufg. Eine gerade Linie in eine gewisse Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Erster Fall. Die Anzahl der Theile dieser Linien sei eine Potenz von 2.

Aufl. Es sei AB (Figur 14) in $16 = 2^4$ gleiche Theile zu theilen; macht die Transversalweite der Nummern 10 auf der A. L. gleich AL, u. tragt die Weite der No. 5 von A oder von B auf AB, dieses giebt den Punkt 8 oder AB ist in 8 halbirt. Nehmt A8 als Transversalweite zwischen der No. 10; traget die Weite von No. 5 von A nach 4, von B nach 12, so ist AB in 4 gleiche Theile in den Punkten 4, 8 und 12 getheilt. Die Länge A4 wird zwischen der No. 10 gestellt, und die Weite der No. 5 von A nach 2, von 4 nach 6, von 8 nach 10, und endlich von 12 nach 14 getragen; solchergestalt ist die gegebene Linie in 8 gleiche Theile getheilt. Um jedes dieser Theile zu halbiren, so könnte man die Weite 10, 10 = A2 nehmen, und die Halbirung mit der Weite der Nummer 5 vollenden; da aber die Oeffnung zu klein sein würde, so wollen wir ein anderes Mittel vorschlagen: Man nehme drei von den letzten Theilen, oder A6, für die Weite 10, 10, und die Weite 5, 5 von A aus abgetragen giebt 3, von 4 aus rechts und links ge-

tragen giebt 7 und 1, zur Rechten und Linken von 8 giebt es 11 und 5, zur Rechten und Linken von 12 giebt es 15 und 9, und endlich zur Linken von B giebt es 13: man hat also eine genaue und bequeme Art eine Linie durch stetige Halbirung in 16 gleiche Theile zu theilen. Nachdem oben Gesagten wird es leicht sein, die gegebene Linie in 32, 64 ꝛc. gleiche Theile zu theilen.

Zweiter Fall. Die Anzahl der Theile sei keine Potenz von 2.

Aufl. Es sei die Linie AB (Fig. 15) in 14 gleiche Theile zu theilen; machet die Transversalweite 10, 10 = AB, und traget die Weite 5, 5 von A oder B in 7, so ist AB in 7 halbirt; es bleibt nun noch übrig A7 und B7, in 7 gleiche Theile zu theilen, welches auf zweierlei Art geschehen kann, nämlich: indem man A7 in 6 und 1, oder in 4 und 3 theilt; diese letztere Art ist vorzuziehen, weil man die Operation durch zwei Halbirungen vollenden kann. Machet 7, 7 = A7, und traget die Weite 4, 4 aus A in 4, zur Rechten und Linken von 7 giebt es 11 und 3, und zur Linken von B giebt es 10: Nehmet 10,10 = A4, und traget die Weite 5,5 zur Rechten und Linken der Punkte 4 und 10, so erhält man 2, 6, 8 und 12; dieselbe Weite aus 3 und aus 11 rechts und links abgetragen, giebt,

1, 5, 13 und 9. Die Linie AB wird also in 14 gl. Theile getheilt sein.

Anmerk. Dieser zweite Fall enthält den von einer ungeraden Anzahl gleicher Theile, daß man also, durch diese Methode, eine Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile theilen kann.

Drittes Kapitel.

Erklärung und Construkion der geometrischen Linie. Linea planorum quadratorum.

Die G. L. (geom. Linie), gleich der Länge der A. L., giebt die homologen Seiten von 64 ähnl. Fig., und deren Flächeninh. durch die Reihe der natürlichen Zahlen von 1 bis 64 dargestellt sind. Man kann sie auf zweierlei Arten construiren, die erste besteht darin die ganze Linie in einer Anzahl gleicher Theile zu theilen, die man, mehrerer Beguemlichkeit wegen, so wählt, daß sie durch $\sqrt{64} = 8$ theilbar ist, man könnte die Zahl 1000 nehmen, welche diese Bedingung erfüllt, bezeichnet man nun die Fläche 64 mit A, und mit B diejenige, deren Seite, die wir x

nennen wollen, man sucht, so hat man die Proportion:

$$A : B = 1000^2 : x^2,$$

woraus

$$x = \frac{1000}{\sqrt{A}} . \sqrt{B} = \frac{1000}{8} . \sqrt{B} = 125\sqrt{B};$$

substituirt man für B die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... 63, so erhält man die homologen Seiten von 63 Fig. in Theilen von A, alle diese Längen trägt man nun auf die G. L. vom Mittelpunkt A aus, und schreibt am Ende eines jeden Theils die Nummer der Fig., von welcher sie die Seite ist.

Man mache in der Gleichung

$$x = 125\sqrt{B},\ B = n,\ \text{so ist:}$$

$$x = 125\sqrt{n}$$

oder $\lg. x = \lg. 125 + \frac{1}{2} \lg. n.$

Woraus man sieht, um die Seite einer Fig. zu haben, muß man zum Logarithmus von 125, den $\frac{1}{2}$ Log. von der Nummer dieser Fig. addiren, alsdann auf die G. L., vom Mittelpunkt aus, die Anzahl der Theile auftragen, die durch die Zahl, welche zu dem erhaltenen Log. gehört, angegeben werden.

Z. B. man wollte die Seite der vierten Fig. finden: für diesen Fall ist $n = 4$;

also $x = 125\sqrt{4} = 125 . 2 = 250.$

Wäre die Seite der 13ten Fig. zu finden, so hätten wir:

$$\begin{aligned} \lg.\ 125 &= 2{,}0969100 \\ \tfrac{1}{2}\lg.\ 13 &= 0{,}5569717 \\ \hline \lg.\ x &= 2{,}6538817 \end{aligned}$$

folgl. $x = 450{,}7$.

Damit man aber für x die berechneten Werthe auf der A. L. abnehmen kann, so ist die folgende Tabelle nach der Formel

$$x = \frac{200}{8} \cdot \sqrt{n} = 25\sqrt{n}$$

berechnet worden.

In meinen 1818 in Berlin bei Stuhr herausgegebenen bequemen logarithmischen, trigonometrischen und anderen nützlichen Tafeln, zum Gebrauch auf Schulen ꝛc. findet sich eine Tafel der Quadratwurzeln aus allen Zahlen von 1 bis 1000.

Mittelst dieser Tafel ist die folgende Tabelle nach der Formel $x = \frac{100}{4} \cdot \sqrt{n}$

wirklich von mir berechnet oder vielmehr abgeschrieben worden.

Tabelle

der

homologen Seiten von 64 ähnlichen Figuren unter der Annahme berechnet, daß die Seite der 64sten Figur zwei Hundert gleiche enthalte.

Nummer der Figur.	Länge der Seit.	Nummer der Figur.	Länge der Seit.	Nummer der Figur.	Länge der Seit.	Nummer der Figur.	Länge der Seit.
1	25,0	17	103,0	33	143,8	49	175,0
2	35,4	18	106,0	34	145,8	50	176,8
3	43,2	19	109,0	35	147,8	51	178,4
4	50,0	20	111,8	36	150,0	52	180,2
5	55,8	21	114,6	37	152,0	53	182,0
6	61,2	22	117,2	38	154,0	54	183,6
7	66,0	23	119,8	39	156,0	55	185,4
8	70,6	24	122,4	40	158,0	56	187,0
9	75,0	25	125,0	41	160,0	57	188,8
10	79,0	26	127,4	42	162,0	58	190,4
11	82,8	27	130,0	43	163,8	59	192,2
12	86,6	28	132,2	44	165,8	60	193,6
13	90,0	29	134,6	45	167,8	61	195,2
14	93,4	30	136,8	46	169,6	62	196,8
15	96,8	31	139,2	47	171,4	63	199,4
16	100,0	32	141,4	48	173,2	64	200,0

Zweite Construction.

Es sei immer noch A die Fläche, deren Seite man hat, B die, deren Seite unbekannt ist, a und x diese Seiten, so hat man, wie oben

$$A : B = a^2 : x^2,$$

$$\text{also } x^2 = \frac{B}{A} \cdot a^2.$$

Um diese Gleichung zu constr., errichtet man auf einer Linie AB (Fig. 16) von gleicher Länge, als die G. L., einen Perpend. $AC = \frac{AB}{8}$, d. h. gleich der Seite der Fig. No. 1; nimmt man nun $AN = AC$, so ist CN gleich der Seite von Fig. No. 2; die Seite von Fig. No. 3, ist die Hypotenuse des Tr. AOC dessen Seite $AO = CN$.

Allgemein, ist die Seite einer Fig., deren Nummer n, die Hypotenuse eines Tr., dessen eine Kathete $\frac{AB}{8}$, die andere aber die Seite von der Fig. No. $n-1$, oder auch die Hypotenuse des vorhergehenden Triangels ist.

Beweis. Der Triangel ACN giebt

$$CN^2 = CA^2 + AN^2 = \frac{2}{64} \cdot AB^2,$$

$$\text{und } CN = x = \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot AB;$$

dieser Werth von x entspricht der Figur Nummer 2.

Im Tr. AOC, hat man

$$CO^2 = AO^2 + AC^2 = \frac{2}{64} AB^2 + \frac{1}{64} AB^2 = \frac{3}{64} AB^2$$

$$\text{und } CO = x = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot AB.$$

Sind diese Seiten gefunden, so beendigt man die Operation, wie es oben gelehrt worden.

Anmerk. Um einen beliebigen Punkt Q zu bestimmen, bedient man sich der Linie CP, die mittelst AO = CN gefunden ist; woraus zu ersehen, daß der Fehler auf die Länge von AQ sich alsdann aus den Fehlern, die bei Bestimmung der vorhergehenden Längen statt gefunden haben, zusammengesetzt; es wird also nöthig sein, auf AB Verificationspunkte zu haben, d. h. Punkte wie O, P, Q, die man durch eine andere Methode gefunden hat; denn wenn sie zusammenfallen, so ist dieses ein Beweis, daß die Operation richtig ist. Man kann diese Punkte auf folgende Art sich verschaffen: man nimmt mit dem Handzirkel eine beliebige Weite NA, läßt eine der Spitzen in N und bringt die andere in der Richtung nach B; und wenn die Theilung richtig ist, so muß diese Spitze auf eine 4fache Nummer treffen. Es sei B die Fläche von AN, und B′ die von 2AN, so hat man

$$B : B' = AN^2 : 4AN^2,$$

woraus $B' = 4B$.

Die zweite Construktion verdient, ihrer Einfachheit

und leichtern Ausführung wegen, den Vorzug vor der erstern.

Gebrauch der geometrischen Linie.

1. Aufg. Einen Triangel, der einem andern ähnlich ist, und mit ihm in einem gegebenen Verhältniß stehet, zu construiren.

Aufl. Es sei m : n das Verhältniß des gegebenen Tr. zu dem zu construirenden; man öffnet den Prop.-Z. so, daß die Transversalweite der Nummern m, auf der doppelten G. L., gleich einer von den Seiten des Tr. ist, alsdann zeigt die Weite der Nummern n die homologe Seite des zu construirenden Tr. Macht man ferner die erste Weite gleich einer andern Seite, so ist die correspondirende Weite der Nummern n eine zweite homologe Seite, und so für die dritte Seite u. s. w.

Beisp. Es sei m = 3, n = 4, und FGH (Fig. 17) der gegebene Tr.; wenn BAC die doppelte G. L., B und C die Stellen der Nummern 4, D und E die der Nummern 3 sind, so macht man, um die Seite des gesuchten Tr. LIK zu finden, successive

DE = FG, = GH, = FH,

welches BC = IK, = KL, = LI

geben wird.

Beweis. Die zwei ähnlichen Tr. ADE, ABC geben:

$$DE : BC = AD : AB, \text{ und also}$$
$$DE^2 : BC^2 = AD^2 : AB^2,$$

Aber, nach der Constr. der G. L., ist das Verh. von AD^2 zu AB^2 das der beiden ähnlichen Fig., die unter sich in dem Verh. von 3 zu 4 sind; folglich sind der gegebene Tr. und der zu constr. Tr. auch ähnl., und in dem Verh. von 3 zu 4.

Anmerk. Wenn die beiden Glieder des Verhältnisses zu klein wären, so multiplicirt man sie mit einerlei Zahl, die man so wählen muß, daß das Produkt nicht 64 übersteigt; im Gegentheil, sollten sie zu groß sein, so dividirt man sie mit einerlei Zahl.

In dem Falle, in welchem die beiden Glieder der Verhältnisse vollkommene Quadrate wären, würde man mittelst der A. L. construiren; zu diesem Behuf zieht man zuerst die Quadratwurzeln, die ich m', n' nenne, macht auf die A. L. die Weite $m'm' = FG$, so ist die Weite $n'n' = IK$.

Wir haben oben gesagt, was zu thun sei, wenn beide Glied. Brüche von verschiedenen Nennern wären.

Zusatz. Dieses Verfahren befolgend, wird man dieselbe Aufg. für Kreise und für Polygone auflösen, indem man sich für die ersten des Durchm. bedient, und die zweiten in Tr. zerlegt; denn wollte man unmittelbar mit den Seiten operiren, so würde man genöthigt sein, sich des Transporteurs zu bedienen;

während wir hier annehmen, daß man nur den Prop.-Zirkel gebrauchen will.

In dem Falle, daß n = am, würde die zu construirende Fläche ein Vielfach. der gegebenen sein, und man hätte die Aufg. von der Vervielfachung der Flächen aufgelöst.

2. Aufg. Das Verhältniß von zwei gegebenen ähnlichen Figuren zu finden.

Aufl. Wenn man von einer der beiden Fig. eine Seite nimmt, und bei einer beliebigen Oeffnung des P.-Z. die Endpunkte dieser genommenen Seite in zwei identische Nummern auf der G. L. fallen läßt, und mit der homologen Seite eben so verfährt, so ist das gesuchte Verh. durch die diesen Seiten corresp. Nummern gegeben.

Beispiel. Angenommen, wir verlangten das Verh. der Tr. FGH, IKL (Fig. 17); wenn BAC die doppelte G. L., D und E die Stellen der Nummern 9 sind, so macht man DE = FG, welches eine Oeffnung des Prop.-Z. giebt, so daß die homologe Seite IK die Weite der Nummer 12 wird; woraus man schließt, daß die beiden Fig. unter sich in dem Verh. 9 zu 12 sind, oder in dem von 3 zu 4 sind, wie in der vorigen Aufg. verlangt wurde. Es ist klar, daß der Beweis der umgekehrte von dem oben gegebenen sein muß.

Anmerk. Wenn, nachdem man die Seite der kleinsten von beiden Figuren, wie oben verlangt worden, in der Oeffnung des P. Z. gestellet hat, und diese Oeffnung so beschaffen wäre, daß sie die homologe Seite der größern Figur nicht fassen kann, alsdann müßte man die kleinere Seite näher am Mittelpunkt des Prop.-Z. auftragen, wodurch die Oeffnung vergrößert würde, oder auch man operirt mit gleichen Brüchen von diesen Seiten.

Man könnte noch, statt die Seiten transversaliter zu stellen, sie vom Mittelp. A aus auf die G. L. abtragen, und alsdann sind die den Endp. entsprechenden Nummern die beiden Glieder der gesuchten Verhältnisse. Man kann endlich annehmen, es sei die G. L. die Seite eines ähnl. Tr., wovon hier die Rede ist, und überdem die Homologe von diesem FG und IK; und dann sind diese Seiten und die Verh. der Tr., zu welchen sie gehören, in der Reihe von denen die man auf dieser Linie sieht.

Andere Auflösung.

Diese Aufg. kann man mittelst der A. L. lösen; macht man nämlich:

$$FG = a,\ IK = b,\ FH = c,$$

und construirt, wie es im vorhergehenden Kapitel gelehrt worden, die vierten Glieder der folgenden zwei Proportionen

$$c : b = b : x' = \frac{b^2}{c};$$

$$c : a = a : x = \frac{a^2}{c},$$

trägt den Werth von x' und x auf die A. L., vom Mittelp. A aus, so geben die den Endp. dieser Linien corsp. Nummern das gesuchte Verh., weil $\frac{x}{x'} = \frac{a^2}{b^2}$ ist.

Eben so findet man das Verhältniß zweier ähnl. Polygone, und das von zwei Kreisen.

3. Aufg. Den Proportionalzirkel so zu öffnen, daß die doppelte geometrische Linie einen rechten Winkel macht.

Aufl. Wenn m eine beliebige gerade Nummer auf der G. L. ist, so macht man die Weite von $\frac{m}{2}$ zu $\frac{m}{2}$ gleich Am, und die Aufg. ist gelöst.

Beweis. Es seien BAC die doppelte G. L., B die Stelle von m, die ich $= 32$ annehme, D u. E die von $\frac{m}{2} = 16$; die Constr. der G. L. giebt:

$$AB^2 = DE^2 : AD^2 = 32 : 16;$$

woraus

$$DE^2 = 2AD^2 = AD^2 + AE^2;$$

der Tr. DAE ist also rechtw. in A.

Es folgt hieraus, daß, wenn die zu B corresp. Nummer das Doppelte von der zu D corresp. Num-

mer übersteigt, der Winkel A stumpf ist, hingegen er spitz sein wird, wenn das Gegentheil statt hat.

4. Aufg. Es sind zwei ähnliche Figuren gegeben; man soll eine Figur zeichnen, die jenen zweien zusammengenommen gleich und ähnlich ist.

Aufl. Nachdem man, vom Mittelp. aus, auf beide G. L. zwei homologe Seiten der zwei Fig. aufgetragen hat, so stellt man diese zwei G. L. unter rechte W., alsdann ist die Transversalweite der Endpunkte von diesen Linien, die homologe Seite einer Figur, welche den beiden ersten an Inhalt gleich ist.

Beisp. Es seien DE, FG (Fig. 19), die homologen Seiten von zwei ähnl. Figuren, und BAC die doppelte G. L.; nachdem AC = FG, und AB = DE genommen, macht man Winkel BAC = 90°, so ist die Weite BC die gesuchte homologe Seite.

Beweis. Es seien A die Fläche der Figur, welche DE = a zur Seite, B die der Figur, zu welcher FG = b gehört, und S die Fläche = A + B, deren homol. Seite ich mit x bezeichne; so muß man folgende zwei Proportionen haben

$$A : S = a^2 : x^2$$

$$\text{und } A : B = a^2 : b^2;$$

aus der letzteren zieht man:

$$A : A + B(S) = a^2 : a^2 + b^2$$

und folglich

$$x^2 = a^2 + b^2 = BC^2.$$

Anmerk. Wenn die Länge der Seiten DE und FG die der G. L. übertrifft, so wendet man nur die Hälfte, das Drittel, u. s. w. von diesen Seiten an, mit der Beachtung, den für x gefundenen Werth zu verbessern so daß er der oben gefundenen Gleichung genügt.

Andere Auflösung.

Man könnte diese Aufg. noch auf folgende Art lösen, wodurch die Stellung der G. L. unter rechten Winkel wegfällt. Nehmt beliebig auf beide G. L. eine Nummer m, macht die Weite mm = DE; bei dieser so bestimmten Oeffnung des Prop. Z. traget die Seite FG transversaliter dergestalt, auf, daß ihre beiden Endp. einerlei Nummer n entsprechen, alsdann die Weite der Nummer m+n, die homologe Seite von einer Fig., die ähnl. und gleich den beiden gegebenen Fig. ist.

Beweis. Es seien BAC (Fig. 20) die doppelten G. L.

D u. E die Stellen der Nr. m,

F u. G " " " " n und endlich

B u. C " " " " n+m,

so hat man die Proportion

$$AB : AD = BC : DE,$$

und quadrirt man die 4 Glieder

$$AB^2 : AD^2 = BC^2 : DE^2.$$

Substituirt man für das erste Verh. das von $m+n$ zu m, so ist

$$m+n : m = BC^2 - DE^2, \text{ hieraus}$$
$$n : m = BC^2 - DE^2 : DE^2;$$

aber man hat

$$n : m = AF^2 : AD^2 = FG^2 : DE^2; \text{ folglich}$$
$$FG^2 : DE^2 = BC^2 - DE^2 : DE^2,$$

woraus man die Gleichung

$$BC^2 = FG^2 + DE^2$$

erhält, welche die oben gefundene ist. Mittelst dieser Constr. könnte man eine beliebige Anzahl ähnl. Fig. zusammen addiren, oder sie von einander abziehen. In der Folge werden wir lehren, mit den Flächen u. Körpern dieselbe Operation als mit den Zahlen zu machen.

5. Aufg. Zwischen zwei gegebenen geraden Linien eine mittlere Proportionale zu finden.

Aufl. Man sucht die Anzahl gleicher Theile, welche die gegebenen Linien enthalten, und wenn die eine Anzahl durch m und die andere durch n bezeichnet ist, so öffnet man die doppelte S. L., so daß die Weite von mm gleich der von beiden Linien, die m gleiche Theile enthält, so ist alsdann die Weite nn die gesuchte mittlere Proportionale.

Beisp. Es seien FG, HI (Fig. 21) die gegebenen Linien, n = 20, m = 45;

B u. C die Stelle der No. 45,

D u. F " " " " 20;

man mache BC = HI, so ist DE die gesuchte Linie.

Beweis. Die ähnl. Tr. ABC, ADE geben

$$AB : AD = BC : DE, \text{ also}$$

$$AB^2 : AD^2 = BC^2 : DE^2;$$

aber durch die Constr. der G. L. hat man

$$AB^2 : AD^2 = 45 : 20,$$

mithin

$$BC^2(HI^2) : DE^2 = 45 : 20 = HI : FG,$$

und multipl. man die beiden Glieder der hintern Verhältniß mit HI, so findet man

$$HI^2 : DE^2 = HI^2 : FG \cdot HI,$$

woraus: $DE^2 = FG \cdot HI$.

Die also bestimmte Linie DE ist daher die mittlere Proportionale zwischen FG und HI.

Anmerk. Diese Aufgabe kann auch mittelst der A. L., aber viel mühsamer, aufgelöst werden.

Zusatz. Da die Verwandlung eines Kr., eines Tr., und folglich von einer beliebigen Figur, in ein Quadrat, von der Aufsuchung einer mittleren Proportionale zwischen der Periph. und dem Halbm., und zwischen den Grundlinien und Höhen, abhängt, so sieht man, daß das eben beschriebene Verfahren auch noch die Aufl. dieser Klasse von Aufg. giebt.

Es dient noch, um folgende Aufg. zu lösen:

Wenn zwei ähnl. Fig. gegeben sind, eine dritte ihnen ähnliche und gleich ihrem Unterschiede zu finden.

Es seien a, b und x die homol. Seiten der drei Figuren,

A die Fläche der ersten,
B " " " zweiten,
D " " " dritten,

so muß man haben

$$D = A - B, \text{ woraus } A = D + B.$$

Aber wir haben Seite 313 gesehen, daß man dieselbe Bedingung durch folgende Gleichung ausdruckt;

$$a^2 = x^2 + b^2,$$

aus welcher man zieht:

$$x^2 = a^2 - b^2 \text{ oder } x^2 = (a + b)(a - b);$$

woraus erhellet, daß die Seite x, zwischen der Summe und der Differenz der homol. Seiten dieser gegebenen Figur die mittlere Proportionale ist.

6. Aufg. Wenn zwei beliebige Figuren gegeben sind, eine Figur zu construiren, die gleich der Summe jener Figuren sei.

Aufl. Man zerlegt die gegebenen Figuren in Tr., sucht alsdann zwischen der Grundl. und der $\frac{1}{2}$ Höhe eines jeden Tr. eine mittlere Proportionale, wodurch die Seite eines Qdrts. bestimmt wird, daß am

Inhalt gleich diesem Tr.; ist dieses geschehen, so bleibt nur noch, wie gelehrt worden, ein Quadrat zu constr., welches am Inhalte gleich der Summe aller gefundenen Quadrate, und folgl. auch gleich ist dem Inhalte der zwei gegebenen Figuren. Man ist also im Stande eine beliebige Anzahl ähnlicher und unähnlicher Figuren zu addiren und von einer andern zu subtrahiren.

7. Aufg. Ein Quadrat zu finden, welches gleich dem Inhalte eines gegebenen Kr. ist.

Aufl. Theilt den Durchm. eines gegebenen Kr. mittelst der A. L. in 14 gleiche Theile, und 12,4 von diesen Theilen geben die Seite des gesuchten Qdrts.

Beweis. Es seien S die Fläche des gegebenen Kreises, D sein Durchm., S' die Fläche des Quadrats, und x die gesuchte Seite; man hat

$$S : S' = \tfrac{11}{14} D^2 : x^2;$$

aber, durch die Annahme $S = S'$,

folgl. $\tfrac{11}{14} D^2 = x^2$;

und macht man $D = 14$, so ist

$$11 \cdot 14 = x^2, \text{ folgl. } x = 12{,}4.$$

8. Aufg. Den Durchmesser eines Kreises zu finden, welcher gleich dem Inhalte eines gegebenen Quadrats ist.

Aufl. Mittelst der A. L. theilt die Seite des Quadrats in 11 gleiche Theile, diese Seite, um 1/4 von diesen Theilen verlängert, giebt den Durchm. des gesuchten Kreises.

9. Aufg. Die Seite eines Quadrats zu finden, welches gleich dem Inhalte einer gegebenen Ellipse ist.

Aufl. Suchet zwischen der großen und kleinen Axe der Ellipse eine mittlere Proportionale, und theilt diese in 14 gleiche Theile, 12/4 von diesen Theilen geben die Seite des gesuchten Quadrats.

Beweis. Der Inhalt der Ellipse ist die mittlere Proportionalfläche, zwischen dem Inhalte der über der großen und kleinen Axe beschriebenen Kreise, und folglich gleich dem Inhalte eines Kreises, dessen Durchm. auch die mittlere Proportionale zwischen den nämlichen Axen ist; die Aufg. ist demnach darauf reducirt, ein Quadrat zu finden, dessen Inhalt gleich dem dieses Kreises sei.

10. Aufg. Eine Ellipse zu beschreiben, deren Diameter in einem beliebigen Verhältniß sind, und deren Inhalt gleich dem Inhalte eines gegebenen Quadrats ist.

Aufl. Angenommen, das Verhältniß der großen Axe zur kleinen sei 2 zu 1; nachdem die Seite

des gegebenen Quadrats in 11 gleiche Theile getheilt worden, mache man folgende Proportion:

$$2 : 1 = 11 . 14(154) : x^2 = 77;$$

$\sqrt{77}$ von diesen Theilen wäre die Länge der kleinen Axe, und das Doppelte die große Axe.

Bew. Wenn x die kleine, also 2x die große Axe, so ist ihr Inhalt $\frac{2x^2}{4} . \frac{22}{7} = a^2$; $2x = \frac{14}{11} . a^2$, woraus sich die Proport. ergiebt, wenn man a Eilf gleiche giebt.

Ende des 7ten Kapitels werden wir zeigen, wie eine Ellipse construirt wird.

Viertes Kapitel.

Erklärung der Polygonlinie.

Linea polygonorum, linea circuli dividendi.

Diese Linie giebt die Seiten von neun in einerlei Kreis beschriebenen regulären Polygonen.

Construktion.

Da das Odrt. von allen regul. Polyg. dasjenige ist, welches außer dem gleichseitigen Tr. die mindeste

Seitezahl hat, und folglich auch dasjenige ist, dessen Seiten die größten sind, so hat man die der andern Polygone für einen Kreis berechnet, in welchem die Seite des eingeschriebenen Quadrats 6 Zoll ist, d. h. so lang als die Polygonlinie. Giebt man dieser Seite des Quadrats 1000 gleiche Theile, so findet man den Halbm. des umschriebenen Kreises

$$r = 1000 \cdot \sin. 45°,$$

oder auch $r = 1000 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 707.$

Wenn die des regulären Sechsseits oder der Halbm. $= r$, die Anzahl der Seiten eines Polygons $= n$, so ist die Seite eines regulären nseits $= 2r \sin. \frac{180°}{n}$.

Nach dieser Formel ist die folgende Tabelle berechnet worden, welche die Seite der Polygone enthält, aber in der Voraussetzung berechnet, daß die Seite des Quadrats 200 gleiche Theile enthält, damit man die für die Seiten der andern Polygone gefundenen Theile unmittelbar auf der A. L. abnehmen kann.

Polygone.		Länge der Seiten.
Quadrat,	Vierseit	200
Pentagon,	Fünfseit	166,2
Hexagon,	Sechsseit	141,4
Heptagon,	Siebenseit	122,6
Octagon,	Achtseit	108,0
Enneagon,	Neunseit	96,8
Decagon,	Zehnseit	87,4
Endecagon,	Eilfseit	79,4
Dodecagon,	Zwölfseit	73,2

Gebrauch der Polygonlinien.

1. Aufg. In einem gegebenen Kreise ein reguläres Polygon zu beschreiben.

Aufl. Oeffnet den P. Z., so daß die Weite der Nummern 6 auf der P. L. (Polyg. Linie) gleich dem Halbm. des gegebenen Kreises ist, alsdann wird die Weite der Nummern der Fig., deren Seite man sucht, die Länge von dieser Seite geben.

Beisp. In einem gegebenen Kreise FGH ein regul. Siebenseit zu beschreiben (Fig. 22).

Es seien BAC die doppelte P. L.,

B u. C die Stellen der Nummern 6,

D u. E » » » » 7,

Man nehme BC = GO, welches die Weite DE gl.

der Seite des im Kreise FGH eingeschriebenen regul. Siebenseits geben wird.

Beweis. AD ist die Seite des Siebenseits in einem Kr., dessen Halbm. AB, und die Tr. ABC, ADE, sind ähnlich; DE wird daher die Seite eines Polygons, von derselben Anzahl Seiten, in einem Kreise beschrieben sein, dessen Halbm. BC ist. Man sieht, daß wenn die Weite BC gleich der Hälfte, dem Drittel, dem Viertel des gegebenen Halbm. macht, die Weite DE der nämliche Bruchtheil von der gesuchten Seite sein wird; um also diese Seite zu haben, müßte man diese hier mit 2, 3, 4 u. s. w. multipliciren; welches geschiehet, wenn der Halbm. des gegebenen Kreises sehr groß ist.

2. Aufg. Ueber einer gegebenen Linie ein reguläres Polygon zu beschreiben.

Aufl. Diese Aufg. ist die umgekehrte von der so eben gelösten. In der That, in dieser gab man den Halbm. des Kreises, und es sollte die Seite, des Polygons gefunden werden; hier ist es die Seite die gegeben ist, und der Halbm. des Kreises ist die Unbekannte: statt also die Oeffnung des P. Z. durch den Halbm. zu bestimmen, um die Länge der Seite zu haben, bestimmt man die Oeffnung durch die Seite, um daraus die Länge des Halbm. abzuleiten.

Beisp. Angenommen, man soll über die gege-

bene Linie FG ein regul. Siebenseit beschr. (Fig. 22): es seien BAD die doppelte P. L.,

D u. E die Stellen von No. 7,

B u. C " " " " 6;

man macht DE = FG, so hat man BC gleich dem gesuchten Halbmesser.

Wenn die Anzahl der Seiten des Polygons 12 überschreitet, so kann man sich der P. L. nicht mehr bedienen; aber alsdann nimmt man seine Zuflucht zu der Chordenlinie, weil die Aufg. folgende wird: An jedem Endp. einer Linie einen gegebenen Winkel zu bilden, der immer gleich sein soll 180° weniger den halben Mittelpunktswinkel; denn alsdann giebt der Durchschnittspunkt der beiden Seiten dieses Winkels den Mittelp., und eine von diesen Seiten ist der Halbmesser.

3. Aufg. Wenn FG die Seite eines Siebenseits ist, die Anzahl der Seiten von einem über MN beschriebenen Polygon zu finden (Fig. 22).

Aufl. Nachdem die Weite 7,7 gleich FG gemacht worden, stellt man MN prll. zu dieser Seite, dergestalt, daß ihr Endp. in zwei identische Nummern treffen, welche alsdann die Anzahl der gesuchten Seiten geben wird. Man nimmt, wohl verstanden, an, daß beide Polygone in einerlei Kr. beschr. sind.

4. Aufg. Eine gegebene Linie nach äußeren und mittleren Verhältnissen theilen.

Aufl. In der Geom. wird bewiesen, daß, wenn man den Halbm. eines Kr. nach äußern und mittlern Verh. theilt, der größere Abschnitt die Seite von einem in demselben Kreise beschr. Zehnseit giebt; alles läuft darauf hinaus, die Seite dieses Zehnseits zu finden, wenn man den Halbm. gleich der gegebenen Linie annimmt.

Anmerk. Wenn man den Gebrauch der Chordenlinie kennt, so hat man noch ein anderes Mittel, den größten unter den beiden Abschnitten zu finden, der, nachdem Gesagten, gleich der Sehne von 36° ist.

Es sei a die gegebene Linie, x der gesuchte größere Abschnitt, so ergiebt sich die Gleichung

$$x^2 + ax - a^2 = 0,$$

$$\text{also } x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + a^2\right)}.$$

Von diesen zwei Wurzeln construirt man nur diejenige, wo das Wurzelzeichen das Zeichen + hat, nämlich:

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + a^2\right)},$$

welches den größern Abschnitt von der nach der oben ausgesprochenen Bedingung getheilten Linie giebt; und da man den kleinen Abschnitt hat, wenn man den größern von der ganzen Linie abzieht, so construirt man auch, wenn x den kleinern Abschnitt bedeutet, diejenigen von den beiden Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - 3ax + a^2 = 0,$$

in welcher das Wurzelzeichen das Minuszeichen hat, nämlich:

$$x = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - a^2)}.$$

$$= \tfrac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} + a^2\right)}.$$

5. Aufg. Ueber einer gegebenen Grundlinie einen gleichschenkligen Triangel zu zeichnen, mit der Bedingung, daß der Winkel an der Grundlinie das Doppelte von dem an der Spitze sei.

Aufl. Da der Triangel gleichschenklig sein soll, so sind die Winkel an der Grundl. einander gleich; und da jeder das Doppelte von dem an der Spitze sein soll, so hat man, wenn dieser letztere mit x bezeichnet wird

$$x + 4x = 180° \text{ und } x = \frac{180°}{5} = 36°.$$

Die gegebene Grundl. wird also die Seite eines Zehnseits in einem Kreise, der als Halbm. eine von den andern Seiten des Tr. hat.

Man kann diese Aufg. allgemeiner aufgeben, indem man sagt:

Ueber eine gegebene Grundlinie einen gleichschenkligen Tr. zu zeichnen, in welchem der W. an der Grundl. in einem beliebigen Verh. zu dem W. an der Spitze stehet.

Um diese Bedingung auszudrücken, hat man die Gleichung

$x + 4nx = 180°$; woraus $x = \frac{180°}{4n+1}$;

nimmt man für n die Brüche $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$ . . . $\frac{11}{4}$; so wird die gegebene Grundl. nach und nach die Seite eines Quadrats, eines Zehnseits, eines Zwölfseits u. s. w. Für alle diese Werthe wird man den Tr. mittelst der P. L. zeichnen, wenn man mit der gegebenen Grundl. zwischen den Nummern der Polygonen, von welcher sie die Seite einer Transversalweite macht, und die Weite 6,6, welche dieser Oeffnung entspricht, nimmt, mit welcher man, aus den beiden Endp. der Grundl. zwei Kreisbogen beschreibt, deren Durchschnittspunkt die Spitze des zu zeichnenden Triangels giebt.

9. Aufg. Den Proportionalzirkel so zu öffnen, daß die doppelten Polygonlinien einen rechten Winkel machen.

Aufl. Oeffnet den P. Z. dergestalt, daß die Weite von No. 10 zu No. 6 gleich der vom Mittelp. bis zu No. 5 sei, oder auch gleich der Seite des Fünfseits, so wird der durch die doppelte P. L. gebildete Winkel ein rechter sein.

Beweis. Die Richtigkeit dieses Verfahrens erhellet aus dem Lehrsatze, daß in einem Kreise das

Quadrat von der Seite eines Fünfseits gleich der Summe der Quadrate von der Seite des Sechsseits und von der Seite des Zehnseits ist.

7. Aufg. Ein reguläres Polygon vom gegebenen Flächeninhalte zu zeichnen (Fig. 23).

Aufl. Angenommen, die gesuchte Fig. sei ein Fünfseit, dessen Inhalt = 125 Qdrtfuß; nachdem man aus $\frac{1}{5}$ von 125, d. h., aus 25 die Quadratwurzel = 5 gefunden hat; zeichnet man ein Quadrat, dessen Seite = 5 Fuß; nachgehends, mittelst der P. L., macht man einen gleichschenkligen Tr. CGD so, daß CD die Seite eines regul. Fünfseits sein kann, welches zu einem mit CD beschriebenen Kreise gehört; nachdem dieses gemacht worden, so verlängere die Höhe EG dergestalt, daß EG gleich der Seite des Quadrats werde, nun ziehe durch den gefundenen P. F eine Prlle. FH zu CG und suche zwischen EH und EF, eine mittlere Proportionale, welches die halbe Seite des gesuchten Fünfseits ist; alles Uebrige der Constr. geschiehet, wie oben beschr. worden.

Beweis. Der Tr. EFH giebt $\frac{EH}{EF} = \frac{\sin. F}{\sin. H}$, woraus:

$$EH = 5 \cdot \frac{\sin. 36°}{\sin. 54°} = 5 \cdot 0{,}726 = 3{,}63 \text{ Fuß};$$

andererseits hat man

$$EH : x = x : EF,$$

wo x die halbe Seite des Fünfseits ist; folglich:

$$x^2 = 5 \cdot 3{,}63 = 18{,}15, \quad x = 4{,}26 \text{ Fuß},$$

und der Umfang $= 5 \cdot 2x = 42{,}6$ Fuß.

Das Apothem des Fünfseits ist

$$= x \cdot \frac{\sin. 54^\circ}{\sin. 36^\circ} = 5{,}8034 \text{ Fuß};$$

Folgl. der Inhalt des Fünfseit

$$\frac{1}{2} \cdot 5{,}8634 \cdot 42{,}6 = 124 \cdot 88 \text{ Qdrtfuß},$$

welcher Werth von dem wahren nur um 0,12 Quadratfuß abweicht.

Mit diesen Aufg. glaube ich mich beschränken zu können, da alle die Aufg., die man noch geben könnte, aufgelöst werden, wenn wir von dem Gebrauche der Chordenlinie handeln.

Fünftes Kapitel.

Erklärung und Construktion der kubischen Linie.

Linea stereometrica solidorum.

Erklärung.

Die kubische Linie, gleich der Länge der A. L., giebt die homol. Seiten von 64 ähnl. Körpern, deren Inh. vorgestellt werden durch die Zahlen 1, 2, 3 ... 64.

Construktion.

Diese Linie kann, wie die G. L., auf zwei verschiedene Arten construirt werden:

1. indem man die homologen Seiten in Theilen der Seite des 64sten Körpers berechnet, und diese Werthe vom Mittelpunkt des Instruments aus aufträgt;
2. oder, wenn man diese Seiten durch graphische Operationen sucht.

Es seien $\frac{A}{B}$ das Verhältniß zwischen dem 64sten Körper und dem, dessen Seite man sucht, $a = 1000$ die Seite des ersten Körpers, u. x die des zweiten; so muß sein

$$A : B = a^3 : x^3,$$

$$\text{woraus } x^3 = \frac{B}{A} \cdot a^3$$

$$\text{und } x = \frac{a}{4} \sqrt[3]{B} = 250 \sqrt[3]{B}.$$

Um also die Werthe von x für alle die Werthe von B zu finden, sucht man die Log. der Zahlen 1, 2, 3, 4 . . . 63, und addirt ihr Drittel zu dem Log. von 250, die dieser Summe entsprechenden Zahlen sind die Theile von a, welche in diesen Seiten enthalten sind. Verlangt man z. B. die Seite des 4ten Körpers, so hat man $B = 4$ und

$$\begin{aligned} \text{lg. } 14 &= 0{,}6020600 \\ \text{lg. } \sqrt[3]{4} &= 0{,}2006867 \\ \text{lg. } 250 &= 2{,}3979400 \\ \text{lg. } x &= 2{,}5986267 \\ \text{folglich } x &= 396{,}85. \end{aligned}$$

In meinen Seite 303 erwähnten Tafeln kann mittelst der Kubikwurzeln diese Rechnung in ein bloßes Abschreiben verwandelt werden. Die folgende Tabelle ist auf diese Art berechnet worden, damit aber die gefundenen Werthe von der A. L. abgenommen werden können, ist a = 200 angenommen, so daß

$$x = \frac{100}{2} \sqrt[3]{B}$$

die allgemeine Gleichung dieser Tabelle, wonach ihre Anfertigung eine bloße Halbirung verlangt.

Tabelle

der

homologen Seiten von 64 ähnlichen Körpern in der Voraussetzung berechnet, daß die Seite des 64sten Körpers zwei Hundert gleiche enthält.

Nummer der Figur.	Länge der Seit.	Nummer der Figur.	Länge der Seit.	Nummer der Figur.	Länge der Seit.	Nummer der Figur.	Länge der Seit.
1	50,0	17	128,6	33	160,4	49	182,8
2	63,9	18	131,0	34	162,0	50	184,2
3	72,0	19	133,4	35	163,6	51	185,4
4	79,4	20	135,6	36	165,0	52	186,6
5	85,4	21	137,8	37	166,6	53	187,8
6	90,8	22	140,0	38	168,0	54	189,0
7	95,2	23	142,2	39	169,6	55	190,2
8	100,0	24	144,2	40	171,0	56	191,2
9	104,0	25	146,2	41	172,4	57	192,4
10	107,6	26	148,0	42	173,8	58	193,4
11	111,2	27	150,0	43	175,2	59	194,6
12	114,4	28	151,8	44	176,4	60	195,6
13	117,6	29	153,6	45	177,8	61	196,8
14	120,4	30	155,4	46	179,2	62	197,8
15	123,2	31	157,0	47	180,4	63	199,0
16	126,0	32	158,8	48	181,6	64	200,0

Zweite Construktion.

Die obigen Benennungen beibehalten, so hat man für die kubische Linie (K. L.) die allgemeine Gleich.

$$x^3 = \frac{B}{A} \cdot a^3;$$

und setzt man $\frac{B}{A} \cdot a^3 = M$, so haben wir die Gleichung

$$x^3 = M,$$

welche sich in zwei andere zerlegt:

$$x^2 = py, \text{ und}$$

$$x^2 + y^2 - py - \frac{M}{p^2} x = 0.$$

Die erste stellt eine Parabel vor, die p zum Parameter hat, und die zweite Gleichung gehört einem Kreise an, dessen Halbm. $r = \frac{1}{2}\sqrt{\left(p^2 + \frac{M^2}{p^4}\right)}$ ist. (Siehe Grüsons Kegelschn., Berlin, 1820, bei Dunker und Humblot, §. 144 und 145.)

Die Ordinate zu dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt dieser zwei Curven ist die Seite des Körpers B, und die Homologe zu a.

Wir wollen uns bei dieser Construktion nicht aufhalten, welche zugleich länger und weniger sicher ist, als die erste.

Gebrauch der kubischen Linien.

1. Aufg. Eine Pyramide zu construiren, welche einer gegebenen ähnlich und mit ihr in einem gegebenen Verhältniß stehet.

Aufl. Um diese Aufg. und die von derselben Art zu lösen, muß man, indem man durch m : n das Verh. des gegebenen Körpers zu dem zu construirenden vorstellt, den P. Z. so öffnen, daß die Weite der Nummern m der doppelten K. L. gleich einer von den Seiten der gegebenen Pyramide sei, alsdann ist die Weite der Nummern n gleich der homologen Seite von der zu construirenden Pyramide.

Beispiel. Es wird die Pyramide FGHI (Fig. 24) gegeben, man soll eine ähnliche Pyramide constr., und die sich zu der gegebenen verhält, wie 54 zu 16.

Wenn AB und BC die kubischen Linien,
B u. C die Nummern 54,
D u. E " " 16,
so macht man die Weite DE gleich einer der Seiten der Pyramide FGHI, z. B., der Seite FG, und die Weite BC wird die Homologe von der gesuchten Pyramide sein; macht man die Weite DE successive gl. den Seiten GH und FH, so wird man LM und KM finden; beschreibt man nun aus den Punkten L und K, als Mittelpunkte, und mit diesen Linien als Halb-

messer, kleine sich schneidende Bogen, so ergiebt sich die Grundfl. der gesuchten Pyramide: mit Hülfe von FI und GI, bestimmt man eben so KN und LN, und wenn man die Durchschnitte N und M verbindet, so wird man NM als Homologe von IH haben.

Beweis. Die Linien AD und AB sind die homologen Seiten der zwei ähnlichen Körper, und in dem Verh. 16 zu 54; daher, wegen der Aehnlichkeit der Tr. ADE und ABC, sind auch die Linien DE u. BC homologe Seiten von zwei ähnlichen Körpern, und in einerlei Verh. mit den zwei ersten.

Anmerk. Wenn eine von den Seiten der gegebenen Pyramide genau gleich der Weite von dem Punkt A bis zur No., welche das erste Glied des Verh. zwischen den beiden Pyramiden ausmacht, d. h., für unser Beispiel, hätte man FG = A16 (Fig. 25), so wäre die homologe Seite der zu construirenden Pyramide die Weite von A bis zur Nummer, welche das zweite Glied dieses Verh. bildet; oder auch, für den in Rede stehenden Fall, man hätte KL = A54. Aber so oft dieser Fall nicht statt hat, so macht man eine Operation, die, im Grunde, nichts anders, als die Constr. von einer neuen Seite der Körper ist, so daß man die oben ausgesprochene Bedingung habe. Es sei die Weite der Punkte 16 gleich FG, und es sei die Linie 64,64 gezogen; sieht man diese Linie, immer angenommen, daß sie 1000 gleiche Theile enthält, als die Seite eines 64sten Körpers an, so werden die Stellen der Nummern 1′, 2′, ꝛc. 16′, 54′, so beschaffen sein, daß die Linien 1′, 1;

2′, 2, ꝛc. 16′, 16; 54′, 54, parallel zu der Linie AB′ werden, und man also hat, 16,16 = B′16′; 54,54 = B′54′, Eben so, wenn man eine andere Seite sucht, so constr. man eine andere Seite der Körper. Man constr. also wirklich so viel Seiten der Körper, als man neue Oeffnungen des P. Z. bestimmt, und jede hat die Eigenschaft, die Weite B′16′ gleich der Seite von der Pyram., deren Homologen man sucht, zu sein.

Wenn eins von den beiden Gliedern, oder beide, 64 übersteigen, so müßte man dieses Verh. durch die Division in ein anderes verwandeln, welches ihm gleich oder welches sich diesem möglichst näherte, und dessen zwei Glieder kleiner als 64 wären. Bezeichnet man mit a und x die homologen Seiten von zwei Körpern, und durch m : n ihr Verh., wenn die Größen m und n vollkommene Kubikzahlen wären, so könnte man die Aufg. mittelst der A. L. lösen.

Wenn endlich die beiden Glieder das Verh. nicht auf einerlei Nenner gebrachte Brüche sind, so fängt man damit an, sie darauf zu reduciren, und das Verh. der neuen Zähler wird das der Körper sein. Wenn aber die beiden Glieder von jedem Bruche vollkommene Kubikzahlen wären, so müßte man gleich die Kubikwurzel ausziehen, und nun auf der A. L. operiren, indem man bloß die Zähler nimmt.

Verlangt man einen Körper zu constr., der zu einem andern in einem gegebenen Verh. stehet, so ist das Erste, die Linien zu suchen, deren man zur Constr. bedarf. Ist der verlangte Körper eine Pyram., so hätte man die Seiten der Grundfl. und die Höhe zu suchen; wenn er ein Kegel oder Zylinder wäre, so hätte man

nur zwei Linien zu bestimmen, den Durchm. der Grundfläche und die Höhe; und wäre der Körper eine Kugel, so wäre nur eine Linie, nämlich der Durchm. zu suchen. Um in jedem Falle die Unbekannten zu finden, muß man, wie Seite 333 gesagt worden, verfahren.

2. Aufg. Das Verhältniß zweier gegebener ähnlicher Körper zu finden.

Lehrsatz. Angenommen, daß die Punkte F und G (Fig. 26. No. 1) den Nummern 16, und die P. K und L den N. 48 entsprechen; wenn das Verh. 16 zu 48 das der beiden Körper ist, nimmt man eine Oeffnung des P. Z., so daß die Punkte F nnd G auf die Nummern 10 fallen, so fallen die Endp. K und L nothwendig auf 30. Man hat in der That, in (Fig. 26. No. 1)

$$FG^3 : KL^3 = 16 : 48 \text{ u. (Fig. 26. No. 2)}$$

$$FG^3 : KL^3 = 10 : x;$$

da nun die beiden Proportionen ein Verhältniß gemein haben, so haben wir:

$$16 : 48 = 10 : x = \frac{480}{16} = 30:$$

woraus ersichtlich, daß, welches auch die Oeffnung sein mag, das gesuchte Verhältniß immer gegeben sein wird, durch die Zahlen, auf welchen die Endp. der gegebenen Linien fallen.

Beweis. Man verlange, z. B., das Verhältniß der beiden Pyramiden IFGH, NKLM, daß man

voraus

voraus weiß, es sei 16 zu 54. Man stellt die Seite FG transversaliter zwischen zwei gleichen Nummern auf der doppelten K. L., nachher sucht man auf dieser Linie zwei identische Nummern, deren Weite gleich der Seite KL sei, und das Verh. zwischen der ersten und zweiten Nummer wird das der Körper sein.

Anmerk. Wenn die Seite eines dieser Körper im Verh. zu der homol. Seite des andern sehr groß ist, so müßte man diese hier möglichst nahe dem Mittelp. auftragen, denn alsdann bestimmt man eine hinreichend große Oeffnung des P. Z., damit es möglich sei, die größte Seite einzutragen.

Wenn aber die Seite des kleinern Körpers selbst von einer solchen Länge wäre, daß, wenn man sie dem Mittelp. nahe stellt, die beiden Schenkel des P. Z. fast ein gerades Lineal bilden, oder auch wenn sie in einer gewissen Entfernung vom Mittelp. gestellt, um eine geringere Oeffnung zu haben, man nicht mehr die andern zwischen zwei identische Nummern stellen kann, dann muß man sie vom Mittelp. aus, auf die K. L. auftragen, und das gesuchte Verh. wird alsdann durch die den Endp. dieser Seiten entsprechenden Nummern angegeben. Es sei m : n das Verh. der beiden Körper, a und b zwei homol. Seiten, c u. d die Entfernungen vom Mittelpunkt des P. Z., bis zu den Nummern m und n: so hat man die Reihe gleicher Verhältnisse

$$m : n = c^3 : d^3 = a^3 : b^3,$$

woraus ersichtlich, daß das Verh. der den Endp. der

Längen a und b entsprechenden Zahlen das der Körper ist, von welchen sie zwei homologe Seiten sind.

Um die 2te Aufg. mittelst der A. L. zu lösen, müßte man zwei Linien finden, welche unter sich in dem Verh. m zu n wären, dann trägt man diese Linien auf die A. L. vom Mittelpunkt an, so ist das Verhältniß der den Endpunkt B und C entsprechenden Zahlen das der Körper. Dieses ist die Aufg., welche wir lösen wollen.

Aufl. Es seien ABC (Fig. 27. No. 1) die doppelten K. L.; FG, HI die homologen Seiten von zwei ähnl. Körpern, die ich in dem Verh. von 10 zu 20 annehme; wenn man auf einer unbegrenzten L. (Fig. 27. No. 2) AB = FG und AD = HI nimmt, und aus B und C als Mittelp., mit diesen Linien als Halbmesser, Halbkreise AC′E, AD′F beschreibt; aus A die Sehne AC′ = AC zieht, verlängert, bis sie die andere Periph. in D′ trifft, und aus den P. C′ und D′, als Mittelp., und mit diesen Linien als Halbm. man Bogen D″D und E′E beschreibt, so werden die beiden Linien AB und AE unter sich in dem Verh. von FG^3 zu HI^3 sein.

Beweis. Die ähnlichen Tr. AEC′, ADD″; AFD′, AEE′, geben die zwei Proportionen

$$AE : AD'' = AC' : AD,$$

$$AE' : AF = AE : AD';$$

beide Glieder des ersten Verh. in beide Proportionen mit 2 dividirt, so hat man

$$\tfrac{1}{2}AE : \tfrac{1}{2}AD'' = AC' : AD \text{ oder}$$

$$AB : AC' (AC) = AC : AD \ldots . (F),$$

und $\frac{1}{2}AE' : \frac{1}{2}AF = AE : AD'$ oder

$$AD' : AC = AE : AD' (AD) \ldots . (G).$$

Aus den Proportionen (F) und (G) zieht man

$$BB = \frac{AC^2}{AD} \text{ u. } AE = \frac{AD^2}{AC};$$

beide Gleichungen durch einander dividirt, geben

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC^3}{AD^3} = \frac{AB^3}{AC^3}$$

gleich dem Verh. der Körper, welche die Linien FG und HI zu homol. Seiten haben.

In der That, wenn man die Linien FG und AE auf die A. L., von ihrem Anfangsp. aus, aufträgt, so wird man finden, daß der P. G auf 54, und der P. E auf 108 fällt; das Verh. dieser Zahlen $= \frac{1}{2} = \frac{10}{20}$, d. h., das der Körper ist.

3. Aufg. **Den Proportionalzirkel so weit zu öffnen, daß die doppelte kubische Linie einen rechten Winkel bildet.**

Aufl. Diese Aufg. läßt eine Menge von Aufl. zu, weil man Herr über die Länge der den rechten W. einschließenden Seiten ist. In der That, nimmt man an, daß eine von diesen Seiten die vom dritten Körper sei, und die andere, die vom Achten, so wird die Weite des Dritten, die ich mit x bezeichne, durch folgende Gleichung gegeben sein

$$72{,}0^2 + 100{,}0^2 = x^2.$$

wo die Zahlen 72,0 und 100, diejenigen von den Theilen sind, welche die Seiten der dritten und achten Körper enthalten: man zieht daraus

$$x^2 = 15184 \text{ und } x = 123{,}22,$$

ein Werth, welcher auffallend nahe der Seite des funfzehnten Körpers ist; nachdem man die Entfernung vom Anfangspunkt bis Nummer 15 auf der K. L. genommen hat, so öffnet man die Schenkel des P. Z., bis daß diese Weite gleich der der P. 3 und 8 ist, und dann wird der Winkel vom Mittelp. ein rechter sein.

Statt 72,0 und 100,0 könnte man zwei andere Zahlen in der Tabelle Seite 231 nehmen, und nachdem wie oben verfahren worden, sucht man in derselben Tabelle den für x gefundenen Werth auf, oder den am meisten genäherten; nimmt man nun die Nummer die gegenüber liegt, so wird man die Weite kennen, in welcher man die zu den gewählten zwei Zahlen correspondirenden Nummern stellen muß, damit die doppelte K. L. einen rechten W. bildet.

Andere Auflösung.

Nennt man x die Seite des 8ten Körpers, und a die des 64sten, so hat man

$$x^3 : a^3 = 8 : 64; \text{ woraus}$$

$$x : a = 2 : 4;$$

hieraus sieht man, daß die Entfernung vom Mittelp. bis zu No. 8 gleich ist der Hälfte von der ganzen K. L., und folgl. gleich der Hälfte von der ganzen Chorden Linie, oder auch gl. den Halbm.: damit aber zwei Halbm. unter sich einen rechten Winkel bilden, so muß die Weite zwischen ihren Endp. gleich der Sehne von 90° sein; man nehme also diese Sehne, und setze einen von ihren Endp. in No. 8 auf der K. L., und öffne die beiden Schenkel des P. Z., bis daß der andere Endp. auf No. 8. fällt.

4. Aufg. Einen Körper zu construiren, der gleich und ähnlich zweien andern ähnlichen Körper.

Aufl. Nachdem man die Endp. irgend einer Seite von einem der beiden Körper in zwei identische Nummern auf der K. L. gestellt hat, welches eine gewisse Oeffnung des P. Z. bestimmen wird, so sucht man auf diese doppelte K. L. zwei andere identische Nummern, welche um die Länge der homol. Seite des andern Körpers von einander liegen; ist dieses geschehen, und die Oeffnung des P. Z. bleibt die nämliche, so nimmt man eine dritte Nummer gleich der Summe der beiden ersten, dann wird die Weite dieser letztern zu ihrer identischen die Länge der homol. Seite des zu construirenden Körpers sein.

Beisp. Man verlangt, eine Pyram. zu constr.,

welche gleich und ähnlich den ähnlichen Pyramiden IFGH, NKLM (Fig. 28). Es seien BAC die doppelte K. L., FG und KL die Seiten, deren homologe man sucht; man nehme beliebig zwei Nummern, z. B. 8, deren Weite man gleich FG macht; da nun die Oeffnung des P. Z. hierdurch bestimmt ist, so stellt man zwischen zwei identische Nummern die homologe Seite KL; ich nehme an, daß die Endp. von KL in 27 fallen, man macht nun die Summe 27 + 8 = 35, so wird die Weite 35/35 die homologe Seite von der zu construirenden Pyramide sein.

Beweis. Man hat (2. Aufg.) gesehen, daß das so gefundene Verh. zwischen den Nummern 8 u. 27 das der Körper ist, man wird also die Proportion haben

$$A : B = 8 : 27.$$

Nennt man X die zu construirende Pyramide, so hat man aus denselben Gründen

$$A : X = 8 : 35.$$

Die erste Proportion giebt:

$$A : A + B = 8 : 35;$$

$$\text{also } A : X = A : A + B,$$

$$\text{und } X = A + B;$$

woraus ersichtlich, daß die so bestimmte Seite 35/35 die Homologe von KL und FG ist, und sie zu einer Pyramide gehört, welche gleich und ähnlich den zwei gegebenen Pyramiden ist.

5. Aufg. Wenn der Durchmesser von einer Kugel gegeben ist, die Seiten von den fünf in dieser Kugel beschriebenen regulären Körpern zu finden.

1) Die Seite des Tetraeders zu finden.

Man öffne den P. Z. so, daß die Weite der Nummern 60 auf der doppelten G. L. gleich dem Durchm. der Kugel sei, so giebt die Weite der Nummern 40 die Größe der gesuchten Seite.

2) Die Seite des Octaeders zu finden.

Wenn die Oeffnung des P. Z. dieselbe bleibt, so ist die Weite der Nummern 30 die Seite des Octaeders.

3) Die Seite des Hexaeders zu finden.

Für dieselbe Oeffnung des P. Z. ist die Weite der Nummern 20 die Seite des Kubus.

4) Die Seite des Dodecaeders zu finden.

Man öffne den P. Z. so, daß die Weite der Nummern 60 auf der doppelten Polygonlinie gleich dem Durchm. der Kugel sei, so ist die Weite der Nummern 36 die Länge der gesuchten Seite.

5) Die Seite des Icosaeders zu finden.

Man stelle die doppelte Polygonlinie unter einen Winkel, so daß die Weite der Nummern 5 gleich dem Durchm. der Kugel sei, so giebt die Weite der Nummern 10 die Seite des Icosaeders.

Anmerk. Wir construiren hier nur mittelst des P. Z. die 4ten Glieder der fünf durch die Geometrie gegebenen Proportionen.

Lehnsatz.

Wenn vier Linien so beschaffen sind, daß die drei ersten eine stetige Proportion bilden, und der Kubus von der dritten gl. dem Produkte der ersten mit dem Quadrate der vierten ist, so werden diese vier Linien eine Reihe gleicher Verhältnisse bilden.

Es seien FG, KL, DE, HI, diese vier Linien; nach der Hypothese hat man

$$FG \,.\, HI^2 = DE^2,$$

woraus

$$FG : DE = DE^2 : HI^2,$$

und multiplicirt man die beiden Glieder der ersten Verhältnisse mit DE

$$FG \,.\, DE : DE^2 = DE^2 : HI^2;$$

aber die Proportion

$$FG : KL = KL : DE \text{ (Hypothese)}$$

giebt $FG \,.\, DE = KL^2$,

es verändert sich also die vorstehende Proportion in diese:

$$KL^2 : DE^2 = DE^2 : HI^2,$$

oder $KL : DE = DE : HI$:

welches die Reihe der gleichen Verhältnisse giebt

$$FG : KL = KL : DE = DE : HI.$$

6. Aufg. Zwischen den gegebenen Linien FG und HI, zwei mittlere Proportionallinien zu finden (Fig. 29).

Aufl. Es reducirt sich alles darauf, eine von den beiden mittleren Proportionallinien zu finden, denn alsdann bleibt nur noch eine mittlere Proportionale zwischen dieser und eine der äußern Linien zu finden (dieses ist der Gegenstand der 5ten Aufg. des dritten Kapitels Seite 343).

Es seien FG = 20 Theile von der A. L.,
HI = 45 von diesen Theilen.
BAC die doppelte K. L.,
B u. C die Nummern 45,
D u. E " " 20.

Man mache die Weite BC = HI, so ist die Weite DE eine von den beiden mittlern Proportionallinien.

Beweis. Die zwei ähnlichen Tr. ABC, ADE geben

$$AB : AD = BC : DE,$$

oder $AB : AD = HI : DE,$

und $AB^3 : AD^3 = HI^3 : DE^3;$

aber statt des Verhältnisses $AB^3 : AD^3$, kann man 45 : 20, oder HI : FG setzen; man wird also haben:

$$HI : FG = HI^3 : DE^3,$$

und multiplicirt man die beiden Glieder des ersten Verh. mit HI^2,

$$HI^3 : FG \cdot HI^3 = HI^3 : DE^3,$$
woraus $FG \cdot HI^2 = DE^3$.

7. Aufg. Die Seite eines Würfels zu finden, welcher gleich dem Inhalte eines gegebenen Parallelepipeds ist.

Construction und Beweis.

Es seien H die Höhe des Prllpds, B und C die beiden Seiten der Grundfl., und P die gesuchte Seite des Kubus; man muß haben

$$P^3 = H \cdot B \cdot C.$$

Man suche zuerst eine mittlere Proportionale M zwischen B und C, welches

$$M^2 = B \cdot C \text{ giebt,}$$

und multiplicire die beiden Seiten mit H,

$$HM^2 = B \cdot C \cdot H;$$

sucht man nun zwei mittlere Proportionalen P u. S zwischen M und H, so wird man haben

$$M : P = P : S = S : H;$$
woraus $M \cdot H = P \cdot S$, und
$$M \cdot S = P^2;$$

diese zwei Gleichungen geben

$$\frac{M \cdot H}{P} = S, \quad \frac{P^2}{M} = S;$$

folglich $\frac{M \cdot H}{P} = \frac{P^2}{M}$,

und $M^2 \cdot H = P^3 = B \cdot C \cdot H$.

W. Z. E. W.

Sechstes Kapitel.

Gebrauch und Construction der metallischen Linie, vom Gewichte der Kugeln, und von dem Caliber der Geschütze.

Gebrauch.

Zwischen der doppelten K. L. sieht man eine Linie, genannt Linea Metallica; sie dient von sechs Kugeln, aus verschiedenem Metall, aber von gleichem Gewicht, die Durchm. zu finden; der Durchm. von der, welcher das kleinste, eigenthümliche (specifische) Gewicht hat, ist zu 6 Zoll angenommen worden.

Construction.

Es seien P und p die Gewichte von zwei Körpern, V und v ihr Volumen, φ und φ' die Gewichte von dem Volumen eines jeden von diesen Körpern, oder die specifischen Gewichte; in der Mechanik wird erwiesen, daß

$$P : p = V\varphi : v\varphi'.$$

Setzt man $P = p$, so hat man die Gleichung

$$V\varphi = v\varphi',$$

woraus $\varphi : \varphi' = v : V = d^3 : D^3$,

wo d und D die Durchm. der Volumen v und V vorstellen.

Auf den P. Z. soll die M. L. (metallische Linie), die in 200 gleiche Theile getheilt ist, als der Durchm. einer Kugel von Zinn angenommen werden, oder d sein; um also den Durchm. einer Kugel von einem gegebenen Metall oder D zu finden, müßte man die Werthe von φ und φ' kennen, und man wird sie erhalten, wenn man von diesen Materien gleiche Volumen abwiegt.

Ein Blick in die Brissonsche Tafel der specifischen Gewichte (deutsche Uebersetzung) überzeugt uns, daß es unmöglich ist, eine M. L. von einem allgemeinen Gebrauche zu construiren; denn man wird daraus ersehen, daß das specifische Gewicht von einerlei Substanz variirt, je nachdem es bearbeitet worden.

Z. B., das Gewicht von einem pariser Kubikfuß gegossenem Eisen ist

= 504 Pfund 7 Unzen 5 Gros 52 Gran,

während das in Stangen ausgeschmiedete Eisen

= 545 Pfund 2 Unzen 4 Gros 35 Gran ist;

das Gewicht von einem gleichen Volumen reinen Zinn aus Cornuailles, gegossen und nicht gehärtet, ist

= 510 Pfund 6 Unzen 2 Gros 68 Gran;
woraus man sieht, daß, für die erste Art Eisen, es der Durchm. der Kugel von demselben Metalle ist, welcher als Maßstab dient, und daß das Gegentheil geschieht, wenn man mit in Stangen geschmiedetem Eisen operirt. Dieselbe Veränderung findet bei dem spec. Gewichte der andern Körper statt; die Brissonsche Tafel giebt vierzehn für Gold, und mehr oder weniger für die andern metallischen Substanzen. Der Gebrauch dieser Linien ist also auf den besondern Metallen, deren man sich zu ihrer Construction bedient hat, beschränkt, und wenn eins von ihnen variirt, so variirt zugleich die für seine Kugel gefundene Länge des Durchm., und in einigen Fällen der ganze Maßstab. Aus allen diesen Betrachtungen gehet hervor, daß man die M. L. von den P. Z. weglassen sollte.

Von der Gewichtlinie der Kugeln.

Gebrauch.

Diese Linie dient, das Gewicht einer Kugel vom gegebenen Durchm. zu finden. Gesetzt, man wollte z. B. das Gewicht von einer Kugel finden, deren Durchm. = 4 Zoll 9 Linien = $158\frac{1}{2}$ Theile wäre; nach geschehener Oeffnung des P. Z., so daß die Gew. L. (Gewicht-Linie der Kugeln), deren ganze Länge sich

auf beide Lineale findet, nur eine einzige gerade L. ausmachen, nimmt man 158⅓ zwischen den Spitzen eines Handzirkels, und wenn man die eine im Anfangspunkt der Linie, der zur Rechten des Worts poids liegt, setzt, so wird die andere zur Linken hingetragen auf Nummer 16 treffen, welches anzeigt, daß diese Kugel 16 Pfund wiegt.

Construction.

Die Erfahrung hat gelehrt, daß eine 3zöllige Kugel von gegossenem Eisen 4 Pfund wiegt (pariser Maß und Gewicht); macht man also die Transversalweite der Nummern 4 auf der doppelten K. L. gl. der Seiten Weite A 100 auf der A. L., d. h., gleich 3 Zoll, so werden die Transversalweiten von einer Nummer zu der ihr gleichen die Durchm. von Kugeln geben, deren Gewicht durch diese Nummern ausgedrückt sind; trägt man also alle diese Weiten, von einem festen Punkte aus, auf eine unbegrenzte Linie, und schreibt die Zahlen 1, 2, 3, u. s. w. an ihren Endpunkten, so wird man eine L. von dem Gewichte der Kugeln construirt haben, oder vielmehr eine Linie der Gewichte von Kugeln desselben Metalls. Um Brüche von Pfunden zu haben, so macht man die Transversalweite der Nummern 4, auf der K. L. genommen, gleich dem oben gefundenen Durchm. von einer 1 Pfündigen Kugel, alsdann werden die der Nummern

1, 2, 3, die Durchm. von einer Kugel von $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ u. $\frac{3}{4}$ Pfund sein, die man auf derselben Linie von demselben P. aus trägt.

Beweis. Die Constr. dieser Linie beruhet auf dieser im Vorhergehenden gefundenen Proportion

$$P : p = V\varphi : v\varphi'.$$

Da alle Kugeln von gleichem Metall sind, so hat man $\varphi = \varphi'$, und

$$P : p = V : v = D^3 : d^3.$$

Woraus ersichtlich, daß, statt das Verhältniß zwischen den Gewichten, man das Verh. zwischen den Volumen setzen kann; dieses ist es auch, was man gethan hat, indem man an den Endpunkt der Durchm. die Nummern geschrieben hat, um Pfunde auszudrücken. Bezeichnet man eben so mit D und d die Transversalweite der Nummern 4 und 1, so hat man

$$L^3 : D^3 = 4 : 1 = 1 : \tfrac{1}{4}.$$

D ist also der Durchm. von einer $\frac{1}{4}$ pfündigen Kugel.

Nimmt man diese Linie in der angenommenen Bedeutung, so sollte man darauf nur die Nummern 24, 16, 12, 8 und 4 bemerken; dieses sind die durch die Ordonnanz vom 7. Okt. 1732 für die Kugeln bestimmten Gewichte. (Siehe Artik. V. von Le Blond's Artillerie.)

Von dem Kaliberstab für Geschütz.

Gebrauch.

Das Kaliber eines Geschützes ist der Durchm. von seiner Mündung. Die Zahlen, welche man auf der Kaliberlinie findet, geben das Gewicht der Kugeln, und die Entfernungen dieser Zahlen vom Anfangsp. dieser Linie sind die Durchm. der Mündung, oder das Kaliber der Geschütze, aus welchen diese Kugeln abgeschossen werden.

Construction.

Damit die Kugel an den Seitenwänden nicht eine Reibung erleidet, wodurch ihre Bewegung sich verminderte, so macht man den Durchm. der Oeffnung des Geschützes ein wenig größer, als den der Kugel, dieser Unterschied zwischen diesen Durchm. heißt der Spielraum der Kugel; um also einen Kaliberstab für Geschütz zu construiren, darf man nur zu den verschiedenen Durchm. der Kugeln die für den Spielraum festgesetzten Linien addiren.

Die folgende aus den Seite 351 genannten Werthen gezogene Tafel giebt die Differenz für die heut zu Tage gebräuchlichen Geschütze; man hat hier die P. und Theile von P. weggelassen, deren die Verordnung erwähnt.

Geschütz

Geschütz	24	16	12	8	4.	
Spielraum	2′	2′	2′	1′	1′	

Allgemein nimmt man für den Spielraum $1\frac{1}{2}$ oder 2 Linien, z. E., mißt man auf dem Kaliberstab die Weite vom Anfangsp. bis zu Nummer 24, und auf der Linie für das Gewicht der Kugeln die Weite zwischen den nämlichen zwei Punkten, so wird die Differenz zwischen dieser letzten und der ersten Linie, welche der Spielraum giebt, auf die A. L., vom Mittelp. des P. Z. aus, getragen, 4 Theilungen messen, und ihr Werth ergiebt sich durch folgende Proportion:

$$200 : 72\,\text{L.} = 4 : x = 1\,\text{L.} + \tfrac{11}{25}.$$

Siebentes Kapitel.

Erklärung und Construktion der Chorden-, der Sinus-, Tangenten- und Secanten-Linien.

Erklärung. Die Chordenlinie dient, einen W. auf dem Papier zu messen, oder auch visirte W. auf dem Papier zu bringen; diese Linie mit so viel Sorgfalt getheilt, als die auf dem englischen Sector, ist dem gewöhnlichen Transporteur vorzuziehen, und kann

bis zu einem gewissen Punkt, die Chordentafel, von welcher weiter unten die Rede sein wird, ersetzen.

Man kann sie auch bei der Constr. der regul. Polyg. anwenden. Auf gewissen P. Z. ist die ganze Chordenlinie gleich dem Halbm., oder der Chorde von 60°; auf anderen ist sie die Chorde von 180° oder der Durchm. Die erste von diesen Linien verdient den Vorzug: denn 1) kann man mit ihr auch einen so großen Winkel, als man will, constr., wenn man die Chorde von seiner Hälfte, 2mal, die Chorde von seinem Drittel 3mal, u. s. w. aufträgt; 2) kann sie viel genauer als die letzte getheilt werden; 3) giebt sie die halben Grade, und da, in einer ziemlich großen Breite, das Intervallen zwischen den Theilungen der letzten Ordnung groß genug ist, so kann man Viertel-Grade abschätzen.

Die Linien der Sin., Tang. und Sec., mit der A. L. verbunden, dienen, alle Aufg. der Ebenen-Trigonometrie, einige aus der sphärischen Trigonometrie, und eine Menge andere zu lösen, von denen wir die interessantesten und wissenswerthesten geben wollen.

Construktion.

Ich setze voraus, man sei mit einer Chordentafel von 1 Minute bis zu 180° für den Halbm. = 1000 versehen, die man sich übrigens auch leicht aus jeder Trig. Tafel selbst verfertiget.

Um auf der Chordenlinie die Sehne von einer beliebigen Anzahl Grade zu haben, z. B. die Chorden 34° 30′, sucht man in der Tafel 34° 30′, und findet daneben 593 als den Werth der Chorde dieses W. für den Halbm. = 1000; da aber die ganze Ch. L. (Chordenlinie) gleich der A. L. ist, so könnte man die letztere als Maßstab nehmen, welches um so vortheilhafter ist, je genauer sie nach dem im 2ten Kapitel entwickelten Verfahren getheilt sein wird. In diesem Falle wird der Halbm. = 200, und man findet die Chorden für diesen Halbm., wenn man in den Tafeln die erste Ziffer zur Rechten durch ein Komma trennt, und nachgehends mit 2 multiplicirt, welches die Chorde von 34° 30′ = 118,6 giebt, nimmt man also die Anzahl Theile auf die A. L., und trägt sie, vom Mittelp. aus, auf die der Ch. L., so wird man schon die von 34° 30′ haben.

Auf dieselbe Art verfährt man, um die andern zu haben.

Da der Sinus eines Winkels die Hälfte von der Sehne des doppelten W. ist, so trennt man davon rechts, nachdem der Werth dieser Sehne in den Tafeln gefunden ist, nur eine Ziffer; da also die Sehne von 60° = 200, so ist sin. 30° = 100 auf der A. L. genommenen Theilen.

Construktion der Tangentenlinie.

Die T. L. (Tangentenlinie) wird auf dieselbe Art eingetheilt, indem man die natürlichen Tg. auf einen Halbm. von 200 gleichen Theilen reducirt. In Grüsons bequemen Log. und Trig. Tafeln findet man die natürlichen Sinus und Tangenten.

Construktion der Linien von den geringsten Tangenten.

Um den Abstand des Mittelpunktes auf dem P. Z. von dem Anfangsp. der Linie der geringsten Tangenten zu finden, oder die Stelle der Nummer 45, setzt man die Proportion

tg. 76° : tg. 45° = 200 : x, woraus x = 49,9 Theile der A. L.; und allgemein ist der Abstand des Mittelp. von einer Zahl n von Graden durch das 4te Glied der Proportion

tg. 76° : tg. n° = 200 : x

gegeben, wo x auf die A. L. gemessen wird.

Construktion der Secantenlinie.

Der Abstand des Mittelp. von dem Anfangsp. der Sec. L. (Secantenlinie) ist gleich der sec. 10°, und dieser Abstand ist durch das vierte Glied der Proportion

sec. 76° : sec. 10° = 200 : x

gegeben, wo der Werth von x auf die A. L. gemes-

sen wird; die sec. n° berechnet man mittelst der folgenden Proportion

$$\text{sec. } 76° : \text{sec. } n° = 200 : x.$$

Man wird wohl thun, den Ort von 0° zu suchen, weil man ihn gebraucht, um die Sec. von einer gegebenen Anzahl Grade für einen gegebenen Halbm. zu bestimmen.

Tangenten.

Die einer Theilung gegenüberstehende Zahl ist die zu dieser Theil. corresp. Grade von 5 zu 5 Graden; die Theil. ist ein wenig länger als die andere. Zwischen der Theilung von der ersten Ordnung und der der zweiten finden sich vier andere Theilungen, welche die zwischen liegenden übertreffen; jene entsprechen Graden, und diese halben Graden.

Sinus.

Vom Mittelp. bis zu 60° ist die S. L. (Sinuslinie) wie die der Tangenten getheilt; von 60° bis 70° ist sie nur von Grad zu Grad getheilt: von 70° bis 80° von zwei zu zwei Graden, von 80° bis 90° ist man genöthigt, die Theilung nach dem Auge abzuschätzen.

Chorden.

Die Ch. L. ist wie die der Tang. getheilt.

Geringste Tangenten.

Von 45° bis 50° ist die Linie der geringsten Tangenten zu zwei und zwei Graden getheilt; aber von 50° bis zu 60° hat man den Grad; und von 60° bis zum Endp. oder 76° geben die Theilungen die halben Grade.

Secanten.

In der Secantenlinie von 10° bis 20° kann nur das Auge abschätzen; von 20° bis 60° wachsen die Theilungen von zwei zu zwei Graden; und von 60° bis 76° gehen sie von halben zu halben Graden fort.

Gebrauch der Chordenlinie.

1. Aufg. Auf der Peripherie eines gegebenen Kreises einen gegebenen Bogen von einer bestimmten Anzahl Grade abzunehmen.

Aufl. Nachdem die Weite der Nummern 60 auf der doppelten Ch. L. gleich dem Halbm. des gegebenen Kreises gemacht worden, nimmt man die Transversalweite der verlangten Grade, welche gleich der Sehne von dieser Anzahl Grade in einem Kreise sein wird, der als Halbm. die erste von den beiden Weiten hat.

Beisp. Es sei der gesuchte Bogen = 80°: wenn nun (Fig. 28) BAC die doppelte Ch. L.,

D u. E die Stelle der Nummern 60°,

B u. C " " " " 80°,

so macht man DE = FG Halbm. des gegebenen Kreises; dann schneidet man aus einem beliebigen P., G, mit BC als Halbm. die halbe Periph. GHK in einem Punkt H, so wird der Bogen GH=80° sein.

Beweis. Die Tr. BAC und DAE sind ähnl. und BA ist die Sehne von 80° in einem Kreise, der AD zum Halbm. hat; folglich wird BC die Sehne von derselben Anzahl Grade in einem mit DE beschr. Kreise sein.

Anmerk. Wenn, wie bei dem englischen Sector, die ganze Ch. L. gleich dem Halbm. ist, und die Anzahl Grade des Bogens 60° übertrifft, so nimmt man alsdann die Hälfte, das Drittel, ꝛc. von diesen Graden; und nach dem man wie oben verfahren, so trägt man zweimal, dreimal, ꝛc. die gefundene Sehne, oder die Transversale von der Hälfte, vom Drittel, ꝛc. von dieser Anzahl Grade auf.

Wenn die gegebene Anzahl Grade sehr klein ist, so ist es viel genauer, sein Complement zu 60° zu gebrauchen. Um also den Bogen von 3° auf der halben Peripherie BCH (Fig. 29 bis) zu haben, muß man die Weite der Nummern 60 gleich AC machen, alsdann schneidet man aus C, als Mittelp., mit der Weite der Nummern 57, den Bogen CB von 60° in k, welches den Bogen FB = 3° geben wird.

2. Aufg. Wenn man den Halbmesser eines Kreises kennt, die Anzahl Grade von einem gegebenen Bogen zu finden.

Aufl. Nachdem man die Weite der Nummern 60 gleich dem Halbm. gemacht hat, so stellt man die Sehne des Bogens transversaliter, so daß ihr Endp. auf zwei identische Nummern fallen, diese werden die in dem Bogen enthaltene Anzahl Grade anzeigen.

Anmerk. Mit Hülfe der ersten Aufg. könnte man in einem auf einer Linie gegebenen Punkt einen Winkel von einer bestimmten Anzahl Grade machen, und mittelst der 2ten Aufg., wird man die Anzahl Grade eines gezeichneten Winkels finden; man ist also im Stande, folgende Aufg. zu lösen:

Ueber einer gegebenen Grundl. einen gleichschenkl. Tr. zu constr., in welchem der Winkel an der Grundl. zu dem Winkel am Scheitel in einem gegebenen Verh. stehet.

Es seien $m : n$ das Verh. des ersten von diesen zwei Winkeln zum zweiten, und x der Winkel an der Spitze; so wird man die Proportion haben

$$n : m = x : \frac{mx}{n},$$

wo das 4te Glied $\frac{mx}{n}$ der Winkel an der Grundl.; und da die Summe der drei Winkel eines Triangels gleich 180° ist, so wird man zur Bestimmung von x folgende Gleichung haben:

$$\frac{2m}{n} x + x = 180°,$$

woraus

$$x = \frac{n \cdot 180°}{2m + n}.$$

Beisp. Es seien (Fig. 30) AB die gegebenen Grundl., $n = 1$, $m = 2$, so ist $x = \frac{180}{5} = 36°$ und folgl. der W. an der Grundl. $= 2 \cdot x = 72°$; um den Tr. zu constr., macht man die Transversalweite der Nummern 60 auf der Ch. L. gleich AB, und nimmt die Weite der Nummern 36, trägt sie 2mal, von A aus, auf einen aus B, mit BA beschr., Bogen; nachdem dieselbe Operation auf der Seite von B gemacht worden, so zieht man durch die Endp. A und n, B und n' gerade Linien, die sich in C schneiden, der △ABC wird, wie erfordert, beschaffen sein. Man könnte sich davon überzeugen, wenn man die Anzahl Grade der Bogen An' und Bn suchte.

3. Aufg. **Wenn man die Anzahl Grade von einem Kreisbogen kennt, den Halbmesser zu finden.**

Aufl. Man öffnet den P. Z. dergestalt, daß die Transversalweite der Nummern, welche die Anzahl der gegebenen Grade anzeigen, gleich der Sehne des Bogens sei; alsdann wird die Transversalweite der Nummern 60 den gesuchten Halbm. geben.

Beisp. HIG (Fig. 31) ist ein Bogen von 80°,

und man verlangte den Halbm., mit welchem dieser Bogen beschrieben ist. Es seien BAC die doppelte Chordenlinie

B u. C die Stellen der Nummern 80,

D u. E " " " 60;

man macht die Weite BC = HG, so ist die hervorgehende Weite DE der gesuchte Halbmesser.

Anmerk. In dem, Falle in welchem die ganze Ch. L. nur 60° andeutete, bestimmt man die Oeffnung des P. Z., indem man die Sehne von der Hälfte, vom Drittel, vom Viertel des gegebenen Bogens nimmt, um daraus die Transv.-Weite zwischen den in der Hälfte, Drittel, oder Viertel, ꝛc. des Bg. enthalt. Graden zu machen, u. der gesuchte Halbm. wird die Transv.-Weite der Nummern 60 sein, die zu dieser Zirkelöffnung correspondiren. In der That, jede in dem Kreise, dessen Halbm. HG, genommene Sehne, wenn sie angemessen gestellt ist, giebt die Weite der Nummern 60 gleich dem Halbm. dieses Kreises.

Alles, was wir so eben gesagt haben, setzt voraus, daß man die Anzahl Grade des Bogens kennt; wenn aber diese Anzahl Grade nicht gegeben wäre, so würde man sie, wie folget, finden.

Man nimmt auf den Bg. GIH einen belieb. P. I, zieht die Sehnen IH, IG willkührlich; nun mißt man den W. HIG und subtrahirt von 360 die doppelte Anzahl der gefundenen Grade, so wird man die des Bogens GIH haben. Jetzt angenommen, man hätte nur die drei P. G, I und H, so könnte man also den Halbm. GC finden, man hätte daher folgende Aufg. gelöst:

Durch drei gegebene Punkte einen Kreisbogen zu legen.

4. Aufg. Den Proportionalzirkel so zu öffnen, daß der durch die doppelte Chordenlinie gebildete Winkel von einer bestimmten Anzahl Grade sei.

Aufl. Man mache die Transversalweite der Nummern 60 gleich der Seitenweite vom Mittelp. des P. Z., bis zu der gegebenen Anzahl Grade.

Beisp. Es sei der gesuchte W. = 40°; B u. C seien die Stellen der Nummern 60° auf der doppelten Ch. L., und D die Stelle der Nummer 40, man mache die Weite BC = AD, so hat man W. BAC = 40°.

Beweis. Da AD die Sehne von 40°, in einem Kr., dessen Halbm. AB ist, so ist BC = AD die Sehne desselben W. für denselben Halbmesser.

5. Aufg. Den Winkel zu finden, welcher die doppelte Chordenlinie bei einer beliebigen Oeffnung des Proportionalzirkels bildet.

Man sieht sogleich, daß diese Aufg. die umgekehrte der vorhergehenden ist; in dieser gab man die Seitenweite, und schloß daraus die Transversalweite der Nummern 60, oder den Mittelpunktswinkel;

hier ist es die Transversalweite, die man kennt, und man sucht die Seitenweite.

Aufl. Man nehme die Transversalweite der Nummern 60, als gegebene Oeffnung, und setzt man eine von den Spitzen des Handzirkels in den Mittelp. A, so giebt die Nummer, welche durch die andere getroffen wird, die gesuchten Grade.

Der Beweis ist der umgekehrte von dem bei der 4ten Aufgabe.

6. Aufg. Eine gegebene gerade Linie nach äußerem und mittlerem Verhältniß zu theilen.

Aufl. Machet die Transversalweite der Nummern 60 gleich der gegebenen Linie; alsdann wird die Weite 36,36, auf diese Linie vom Anfangsp. abgetragen, den größern Abschnitt geben.

Beweis. Man beweiset in der Geom., daß die Seite eines im Kreise beschr. regul. Zehnseits gleich ist dem größern Abschnitt von dem nach äußerm und mittlerm Verh. getheilten Halbm. dieses Kr.; nun ist aber die Seite des Zehnseits die Sehne von 36°, wird also die Weite der Nummern 60 als Halbm. genommen, so wird die prll. corresp. Weite der Nummern 60° der größere Abschnitt von dieser nach dem gegebenen Verh. getheilten Linie sein.

Gebrauch der Sinus-, Tangenten- und Secanten-Linien.

7. Aufg. Wenn der Halbmesser 2 Zoll ist, den Sinus und die Tangente von 28° 30′ zu finden.

Aufl. Oeffnet den P. Z. so, daß die Transv.- der Nummern 90 auf der doppelten S. L. (Sinuslinie), oder von 45 auf der Tang. L., gleich dem gegebenen Halbm. sei, d. h., = 2 Zoll: alsdann wird die Transv.-Weite der Nummern 28° 30′ die Länge des Sinus oder der Tangente für diesen Halbmesser sein.

8. Aufg. Für denselben Halbmesser die Secante von 28° 30′ zu finden.

Aufl. Machet aus dem gegebenen Halbm. die Transv.-Weite von o zu o, im Anfangsp. der Sec. L. (Secantenlinie): so wird die den gegebenen Graden corresp. Weite die Secante von diesen Graden für einen Halbm. von 2 Zoll sein.

9. Auf. Die Tangente von einen Winkel, der über 45° ist, z. B. dem von 60°, zu finden.

Aufl. Um diese Aufgabe zu lösen, muß man sich der Linie der kleinsten Tangenten bedienen; nimmt

man nun den Halbm. von 2 Zoll an, so muß man die Nummern 45°, die sich im Anfangsp. dieser Linie befinden, in dieser Weite halten, alsdann ist die correspond. Weite der Nummern 60 die Tang. von dieser Anzahl Grade für den gegebenen Halbmesser.

Anmerk. Die Maßstäbe der kleinsten Tangenten und Secanten gehen nur bis 76°. Da man aber oft diese Linien für eine größere Anzahl von Graden nöthig hat, so glauben wir verpflichtet zu sein, hier eine Tafel der natürlichen Tangenten und Secanten über 75° für den Halbm. = 1 zu geben.

Grade.	Natürliche Tangenten.	Natürliche Secanten.
76	4,011	4,133
77	4,331	4,445
78	4,701	4,810
79	5,144	5,241
80	5,671	5,759
81	6,314	6,392
82	7,115	7,185
83	8,144	8,205
84	9,514	9,567
85	11,430	11,474
86	14,301	14,335
87	19,081	19,107
88	28,639	28,654
89	57,290	57,300

Gebrauch dieser Tafel.

Nachdem man den gegebenen Halbm. auf die A. L. gemessen hat, multipl. man den tabellarischen Werth von der Tang. oder von der Sec. mit den in dem Halbm. enthaltenen Theilen, so wird das Produkt die Anzahl der auf der A. L. zu nehmenden Theile anzeigen, um den Werth von der Länge der gesuchten Tang. oder von der Sec. zu haben.

Beisp. Die Länge der Tang. u. der Sec. von 80°, für einen Halbm. zu finden, der, auf einen Maßstab von 25 Theilen auf einen Zoll gemessen, 47½ von diesen Theilen enthält.

Für 80° hat man

Tang. = 5,6713	Secante = 5,7587
Halbm. = 47,5	47,5
Produkt = 269,3725.	Prod. = 273,5525.

Nimmt man also auf der A. L. ungefähr 269⅓ u. 273½ von diesen Theilen, so wird man die Länge der Tg. und der Sec. von 80° haben.

Die Linie der größten Tang. wird die von einer Anzahl Grade über 72 geben, so oft, als der gegebene Halbm. transversaliter zwischen den Complementen-Graden gestellt werden kann.

10. Aufg. Die Tang. von 78° für einen Halbmesser von zwei Zoll, mittelst der größten Tangentenlinie zu finden.

Aufl. Machet die Transv.-Weite der Nummern 12 gleich 2 Zoll, die der Nummern 45° wird die Tang. 78° sein.

Beweis. Die Aehnlichkeit der Tr. ABC, ADE (Fig. 33) giebt

$$x : R' = AB : AD$$

oder $x ; R' = R : \text{tg. } 12°$:

setzt man in dieser Proportion für Tangente 12° ihren Werth

$$\frac{R^2}{\text{Cotg. } 12°} = \frac{R^2}{\text{tg. } 78°},$$

so verändert sie sich in diese

$$x : R' = R : \frac{R^2}{\text{tg. } 78°};$$

dividirt man die beiden Glieder des hintern Verh. durch R und multipl. mit Tang. 78°, so wird man haben

$$x : R' = \text{tg. } 78° : R$$

diese Proport. zeigt an, daß die Linie x = der Tangente von 78° für $R' = 2$ Zoll ist.

11. Aufg. Die Secante 78° für einen Halbmesser von 2 Zoll, ohne Hülfe der vorhergehenden Tafel, zu finden.

Aufl.

Aufl. Machet die Transversalweite der Nummern 12 auf der Sinuslinie gleich 2 Zoll, so giebt die Weite der Nummern 90, auf derselben Linie genommen, die sec. 78°.

Beweis. Bezeichnen wir die gesuchte Linie mit x, so hat man, wegen der Aehnlichkeit der Tr.

$$x : R' = R : \sin. 12°;$$

setzt man für sin. 12° seinen Werth

$$\frac{R^2}{\text{cosec.}12°} = \frac{R^2}{\text{sec.}\ 78°},$$

und multiplicirt man die beiden Glieder des hintern Verhältnisses mit $\frac{\text{sec. } 78°}{R}$,

so verändert sich die Proportion in diese

$$x : R' = \text{sec. } 78° : R,$$

woraus ersichtlich, daß die Linie x die sec. 78° für den gegebenen Halbm. ist.

Kehrt man diese Operation um, so hat man die Mittel, die correspondirenden Grade zu den Tang. u. Secanten zu finden, die zu lang wären, um transversaliter gestellt zu werden, wenn der P. Z. für den gegebenen Halbm. geöffnet ist.

12. Aufg. Die correspondirende Anzahl Grade zu einer gegebenen Tangente für einen bekannten Halbmesser zu finden.

Aufl. Oeffnet die doppelte Linie der kleinsten

Tangenten dergestalt, daß die Weite der Nummern 45 gleich der Tang. sei, alsdann suchet zwei identische Nummern, deren Entfernung gleich dem gegebenen Halbm.; diese Nummern werden das Complement der zu der Tangente gehörenden Anzahl Grade geben.

13. Aufg. Zu einer für einen bekannten Halbmesser gegebenen Secante die entsprechende Anzahl Grade zu finden.

Aufl. Tragt die gegebene Sec. transversaliter zwischen den Nummern 90 der doppelten Sinuslinie, und suchet zwei Nummern, deren Weite gleich dem Halbm.; nimmt man nun das Complement zu 90° von der Anzahl Grade, welche sie anzeigen, so wird man die der gegebenen Sec. entsprechenden Anzahl Grade finden.

14. Aufg. Wenn die Länge des Sinus, der Tangente und der Secante, nebst der entsprechenden Anzahl Grade gegeben sind, die Länge des Halbmessers zu finden.

Aufl. Traget die gegebene Linie transversaliter zwischen den gegebenen auf der gehörigen Linie genommenen Graden: die Länge des Halbm. wird alsdann für den Sinus, durch die Weite 90,90 gegeben sein.

Für die Tangente, durch die Weite der No. 45, nach dem Endp. oder dem Mittelp. des P. Z. zu, je nach dem daß die Anzahl Grade kleiner oder größer als 45 ist.

Und für die Secante, durch die Weite o/o, am Anfange der Sec. nach dem Mittelp. des P. Z. zu.

15. Aufg. Wenn ein Halbmesser nebst den Sinus, die Tangente und Secante gegeben sind, die entsprechenden Anzahl Grade zu finden.

Aufl. Man nimmt hier an, daß die gegebene Tang. und Sec. in der bestimmten Oeffnung enthalten sein kann, indem man den Halbm. zwischen den Nummern 45° auf der Tangentenlinie oder zwischen o/o auf der Secantenlinie stellt.

Ist nun der P. Z. dergestalt geöffnet, daß die Weiten 90/90; 45/45; o/o gleich dem gegebenen Halbm. seien, so sucht man zwei identische Nummern, deren Weite die gegebene Linie giebt; diese so gefundenen Nummern werden die den gegebenen L. entsprechenden Grade und Theile von Graden geben.

16. Aufg. Die Länge des Sinus versus für eine gegebene Anzahl Grade für einen bekannten Halbmesser zu finden.

Aufl. Machet die Weite der Nummern 90, auf der Sinuslinie genommen, gleich dem gegebenen Halbmesser; nehmet nachgehends die Weite der Complemente von der Anzahl der proponirten Grade: alsdann, je nachdem daß diese Anzahl größer oder kleiner als 90° ist, wird der Sinus versus durch die Summe oder Differenz des Cosinus und Halbm. gegeben sein.

17. Aufg. Aus den gegebenen beiden Catheten eines rechtwinkligen Triangels die Hypotenuse zu finden.

Auflösung mittelst des P. Z.

Angenommen (Fig. 34), die Cathete AC = 40 Theilen und AB = 30; öffnet den P. Z. dergestalt, daß die doppelte A. L. einen rechten W. bilden, nun nehmet 40 Theile auf eine von diesen Linien und 30 Theile auf die andere: wenn man alsdann die Weite 30, 40 auf die A. L. trägt, so ergiebt sich, daß sie 50 von diesen Theilen enthält.

Durch Rechnung.

Bezeichnet man die Hypotenuse mit x, so hat man $x^2 = 30^2 + 40^2 = 2500$,

und $x = 50$.

18. Aufg. Wenn die Cathete AB = 30 und der Winkel BCA = 37° gegeben ist, die Hypotenuse BC zu finden (Fig. 34).

Auflösung mittelst des P. Z.

Machet die Weite der Nummern 37, auf der Sinuslinie genommen, gleich der gegebenen Linie AB; alsdann wird die prll. Weite von 90 zu 90 die Hypotenuse BC geben, die, aus dem Mittelp. auf die A. L. getragen, ein wenig über 49 hinaus fallen wird.

Durch Rechnung.

lg. 30 = 1,4771213
lg. sin. 37° = 0,7794630 — 1
Differenz = 1,6976583 = lg. 49,849.

19. Aufg. Wenn die Hypotenuse und eine Cathete gegeben sind, die andere Cathete zu finden.

Aufl. Oeffnet das Instrument dergestalt, daß die doppelte A. L. rechtw. auf einander stehen; dann nehmet, vom Mittelp. aus, die Anzahl der, in der Cathete enthaltenen Theile, und aus dem Endpunkte dieser Länge als Mittelp., und mit der Hypotenuse als Halbm., beschr. auf dem andern Schenkel einen Kreisbogen, dessen Durchschnitt mit der A. L. die An-

zahl in der gesuchten Cathete enthaltenen Theile geben wird.

Es sei die Hypotenuse = 50 und die Cathete = 40, so finden wir, daß der Durchschnittsp. auf Nummer 30 fällt.

20. Aufg. Wenn die Hypotenuse und der Winkel ACB gegeben ist, die andere Cathete zu finden (Fig. 34).

Aufl. Machet die Weite der Nummern 90, auf der Sinuslinie, gleich der gegebenen Hypotenuse, wenn man nun die Anzahl Grade des Winkels ACB mit n bezeichnet, so wird die Weite der Nummern n die Länge der Seite AB geben.

21. Aufg. Wenn beide Catheten gegeben sind, den W. BCA zu finden (Fig. 34).

Auflösung mittelst des P. Z.

Traget CA, vom Mittelp. aus, auf beide A. L., dann bestimmt die Oeffnung des P. Z., indem man die Weite der den Endp. von AC corresp. Nummern gleich der perpend. AB macht; so wird alsdann die Tang. des Winkels BCA durch die Weite der Nummern 200 gegeben sein: trägt man diese Weite, vom Mittelp. aus, auf die Tangentenlinie, und zählt die auf dieser Länge enthaltenen Grade und Theile von

Graden, so wird man das Maß des Winkels BCA haben.

Beisp. Es seien CA = 60 und BA = 30, die Weite der Nummern 200 durch 60,60 = 30 gegeben, wird auf der A. L. gemessen, ein wenig mehr als 133 Theile messen, und man findet, daß der dieser Tang. entsprechende Winkel = 33° 40′ ist.

Auflösung durch Rechnung.

Man hat die Proportion

Halbm. (200) : tg. BCA = 60 : 40,

folgl. tg. BCA = $\frac{40}{60} \cdot 200 = \frac{2}{3} \cdot 200 = 133{,}33$.

22. Aufg. **Aus zwei gegebenen Seiten und dem davon eingeschlossenen Winkel die dritte Seite des Triangels zu finden (Fig. 35).**

Aufl. Es seien AC = 20, BC = 30, und der Winkel ACB = 110°; öffnet das Instrument, bis daß die doppelte A. L. einen Winkel gleich dem gegebenen Winkel macht, d. h., gleich einem Winkel von 110°; traget jede Seite des Tr., vom Mittelp. des Instr. aus, auf jede A. L., so wird die Weite der Endp. die Länge der gesuchten Seite AB sein.

23. Aufg. **Aus zwei Winkeln CAB, ACB, nebst der Seite CB, die Seite AB zu finden (Fig. 35).**

Auflösung mittelst des P. Z.

Es seien CAB = 50°, ACB = 60°, und CB = 40; machet die Weite der Nummern 50 auf der doppelten Sinuslinie gleich 40, so wird die Weite der Nummern 60 die Länge der Seite AB geben; und diese Weite, vom Mittelp. aus auf die A. L. getragen, wird 45 von diesen Theilen messen.

Durch Rechnung.

Man hat die Proportion

sin. 50° : sin. 60° = CB : AB,

lg. 40 = 1,6020600

lg. sin. 60 = 0,9375306 — 1

Summa = 1,5395906

lg. sin. 50° = 0,8842540 — 1

Differenz = 1,6553366 = lg. 45,22.

24. Aufg. Aus den drei gegebenen Winkeln eines Triangels das Verhältniß zwischen den Seiten zu finden.

Aufl. Nehmet die Seiten-Sinus dieser verschiedenen Winkel und messet sie auf die A. L., die den Endp. entsprechenden Zahlen werden die gesuchten Verh. ausdrucken.

25. Aufg. Aus den drei gegebenen Seiten eines Triangels den Winkel ACB zu finden. (Fig. 35.)

Aufl. Traget die Seiten AC und CB, vom Mittelp. aus, auf beide A. L., und bringet zwischen den Endp. die dritte Seite AB; alsdann giebt die aus den Mittelp. auf der Sinuslinie aufgetragene Weite der Nummern 200 die Anzahl Grade u. Theile von Graden des Winkels ACB.

Es seien AC = 30, CB = 40, und AB = 20, so wird man finden Winkel ACB = 28° 30'.

26. Aufg. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen sphärischen Triangels ABC ist = 43°, und Winkel CAB = 20°, die Seite CB zu finden. (Fig. 36.)

Aufl. Nehmet mit einem Handzirkel, vom Mittelpunkt aus, auf der Sinuslinie 20°, und setzt diese Weite transversaliter zwischen 90; der prik. sin. 43°, als der Werth der gegebenen Hypotenuse, vom Mittelpunkt aus, auf der Sinuslinie gemessen, giebt 13° 30' für die gesuchte Seite: dieses findet man auch, wenn man das 4te Glied durch die Proportion sucht

Halbm. : sin. 43° = sin. 20° : sin. CB.

27. Aufg. Wenn in einem rechtwinkligen sphärischen Triangel die Cathete BC und die Hypotenuse AC gegeben sind, die andere Cathete AB zu finden (Fig. 36).

Aufl. Machet, daß der Halbm., oder der sin. 90°, eine Transversalweite zwischen der Anzahl Grade der gegebenen Cathete, welche ich gleich 76° 30′ annehme; alsdann, weil der prll. Sinus vom Complement der Hypotenuse, z. B. von 47° auf der Sinusl. gemessen, = 49°25 gefunden wird, welche das Complement von der gesuchten Cathete ist, und folglich wird diese Cathete selbst = 40° 35′ sein; dieses ist in der That der Werth des 4ten Gliedes in der Proportion.

cos. BC : Halbm. = cos. AC : cos. AB.

28. Aufg. **Ueber einer gegebenen Linie BC ein Kreissegment zu beschreiben, welches einen gegebenen Winkel faßt (Fig. 37).**

Aufl. Halbiret BC in A, und ziehet durch A einen unbegrenzten Perpendikel DAE, nun öffnet den P. Z. dergestalt, daß die Weite der Nummern 45° auf der Tangentenlinie gleich AC sei, und nehmet die prll. Tangente von der Differenz zwischen 90° und dem gegebenen Winkel; diese Tg., von A aus, auf der entgegengesetzten Seite des Segments getragen, wenn der gegebene Winkel 90° überschreitet, u. auf der Seite des Segments im entgegengesetzten Falle werden die Mittelp. D, F, G, H, u. s. w. der gesuchten Segmente geben, und die Entfernungen von C werden deren Halbm. sein. Wenn der gege-

bene Winkel = 90°, so wird A der Mittelp. des Kreises und AC der Halbmesser.

Der Durchschn. der Linie DE mit einem Bogen des Segments ist der Mittelp. eines andern Segments, welches einen halb so großen Winkel als der erste enthält.

Beweis. Es seien W. CIB = 80°, W. CRB = 40°, und G der Mittelp. des Segments CIB, so wird man haben

Bog. BIC = 360° — 160° = 200°;

folgl. Bog. BI = $\frac{\text{Bg. BIC}}{2}$ = 100°.

Der W. BCM wird also = 50° u. Bg. BM = 100° sein, die, zu MRC = 180° addirt, 280° geben davon das Compl. zu 360° = 80° ist: der Winkel CRB wird also zum Maße haben

$$\frac{80°}{2} = 40° = \tfrac{1}{2}\,\text{W. CIB}.$$

Wenn also die Differenz zwischen 90° u. der Anzahl Grade vom W. des Segments sich nicht auf der Tangentenlinie findet, so fängt man damit an, den Bogen des Segments zu beschr., welcher den doppelten gegebenen W. enthält; und aus dem Durchschn. dieses Bogens mit DE, als Mittelp., und mit der Entfernung dieses Durchschnitts von C als Halbm. beschreibt man den Bogen des gesuchten Segments.

29. Aufg. Eine Ellipse über gegebene Axen zu beschreiben (Fig. 38).

Aufl. Wenn AB und ED diese Axen, so öffnet man den P. Z. dergestalt, daß die Weite der Nummern 90 auf der Sinuslinie gleich der $\frac{1}{2}$ Axe AC; alsdann theilt man AC in Theile der Sinuslinie, indem man von C gegen A die parallelen Weiten von Grad zu Grad, oder nur von zehn zu zehn Grad vom Mittelpunkt des P. Z. an aufträgt, und durch alle Theilungspunkte errichtet man unbegrenzte Perpendikularen; ist dieses geschehen, so macht man die Weite der Nummern 90 gleich der conjungirten Axe DC; nimmt man nun die parallel. Weiten, aber von 90 an, auch von 10 zu 10 Grad, und trägt sie aus dem Endpunkt der Cosinus auf beiden Seiten von AC auf die Perpendikel, so bemerkt man die Punkte M und m, R und r, P und p ꝛc., welche der Ellipse angehören.

Achtes Kapitel.

Logarithmischer Maßstab.

Erklärung. Wenn der P. Z. so geöffnet ist, daß er nur ein einziges gerades Lineal ausmacht, so findet man, in dem durch die halben Sinus- und Tangenten-Linien und der Kante des P. Z. gebildeten triangul. Raumes, drei mit Tang., Sinus, Num. bezeichneten Linien. Man nennt sie Logarithmische Linien, weil, in jeder von ihnen, die Entfernung vom Anfange einer beliebigen Theilung der Logarithme von der über die Theilung geschriebenen Zahl ist.

Logarithmische Linie der Zahlen.

Construction.

Man wählt beliebig eine Linie, um die Einheit oder den Log. 10 vorzustellen, und nachdem sie in 100 gleiche Theile getheilt worden, trägt man, vom Anfange aus, 30 von diesen Theilen für den Log. 2; 48 für den Log. 3; 60 für den Log. 4, und so fort, wie man es in den Tafeln findet; schreibt man nun

an den Endp. dieser Weiten die Zahlen 1, 2, 3, 4, ꝛc. bis 10, so wird man einen Logarithmischen Maßstab construirt haben. Um diesen Maßstab bis auf 100 auszudehnen, darf man nur noch, von 10 an, die Weiten 1/2, 1/3, 1/4 ꝛc. auftragen, und an den Enden die Zahlen 2, 3, 4, ꝛc., 1 schreiben, die man für 20, 30, 40 bis 100 nimmt; in der That da die Weiten von No. 10 zu No. 20, 30, 40 ꝛc. 100 die Mantisse der Log. dieser Zahlen vorstellen, weil die Karakteristik die Länge 1/10 ist, und da dieser Decimaltheil derselbe als der der Zahlen 1, 2, 3, ꝛc., ist, so müssen die Theilungen zwischen 10 und 100 gleich denen zwischen 1 und 10 sein.

Um die Logarithmischen Linien der Zahlen vom ausgedehnteren Gebrauch zu machen, könnte man annehmen, daß ihr Anfang von der am meisten nach der Rechten stehenden Nummer 1, um die ganze Länge 1/10 abstehet; denn alsdann wird die erste 1/10, die in der Mitte wird 100, die am Ende wird 1000; und die Theilung der 2ten Ordnung, die nur in diesem Falle dienen, werden Einheiten in dem Raum 10/100, und Zehner in den Raum 100/1000 vorstellen, wodurch der Werth der andern Nummern bestimmt wird. Man wird, wie oben, beweisen, daß zwei, in gleicher Weite, und zur Rechten der Nummern 10 und 100 genommene Theilungen unter sich gleich sind.

Beweis. Die Proportion

$$a : b = c : x$$

geben diese Gleichung zwischen den Logarithmen;

$$\lg. x = \lg. b + \lg. c - \lg. a,$$

und $\lg. x - \lg. b = \lg. c - \lg. a.$

Um also, mittelst des log. Maßstabes, die zu lg. x correspondirende Zahl zu finden, nimmt man zwischen den Spitzen eines Handzirkels die Weite a zu c, Werth von der zweiten Hälfte der Gleichung; setzt man nun eine von den Spitzen auf Nummer b, die andere zur Rechten oder zur Linken getragen, je nachdem von a ausgehend man zur Rechten oder zur Linken gehen muß, um c zu treffen, wird auf das 4te Glied der Proportion fallen.

Logarithmische Linien der Sinus und Tangenten.

Constr. Die Constr. der Logarithmischen Linie von den Sinus und Tangenten ist ganz dieselbe als die von der Logarithmischen Linie der Zahlen, in diesen zwei Linien ist die Weite vom Anfange zu $1° = 8{,}242$, wie es aus den Log. Tafeln zu ersehen ist: die Aufl. der Aufg. mittelst dieser L. erfordert übrigens nicht, daß man ihren Anfang kennt, weil man nur die Differenz dazu gebraucht.

In der Sinuslinie, von 1° bis zu 10°, hat man die Log. von 10 zu 10 Minuten; von 10° bis zu 40°, sind sie von 30 zu 30 Minuten; von 40° bis 60°, sind sie von Grad zu Grad; von 60° zu 80°, haben wir sie von zwei zu zwei Grad, und von 80° bis zu 90° kann man nun nach dem Auge abschätzen. In der Tangentenlinie, von 1° bis zu 10° hat man die Log. von 10 zu 10 Minuten, und nur von 30 zu 30 Minuten in dem Rest der Linien.

Anmerk. Wenn die Vorderglieder in der Proportion Sinus wären, und die Hinterglieder Tang. oder Seiten, so würde man den ersten Theil der Operation mit der Log. Linie der Sinus, und den zweiten mit der der Tangenten oder der Zahlen ausführen.

Die folgenden Beispiele werden dieses alles erläutern.

Gebrauch der Logarithmischen Linie.

1. Aufg. Es sei die Proportion

$$4 : 32 = 18 : x.$$

Nachdem man mit einem Handzirkel, auf der Lg. Linie der Zahlen, die Weite von 4 zu 32, oder von 40 zu 320 gemessen hat (in diesem letztern Falle ist die Nummer 1 vom Anfange als 10 genommen, die in der Mitte als 100, und die zwischen Theilungen

werden

werden dem gemäß geschätzt); setzt man eine der Spitzen auf 18, alsdann wird die andere, zur Rechten gewendet, auf 144 als den Werth von x fallen.

2. Aufg. Es sei die Proportion

$$R : \sin. 30° 17' = 120° : x°.$$

Man nimmt die Weite von 90° zu 30° 17′ auf die Logarithmische der Sinus, und setzt die eine Spitze des Handzirkels auf Nr. 120 der Logarithmischen der Zahlen, die andere Spitze links gestellt, weil das 4te Glied kleiner als das erste ist, giebt 60½ Ruthe, als die Länge der gesuchten Seite.

3. Aufg. Es sei die Proportion:

Cosinus der Breite von 51° 30′ (sin. 38° 30′)
verhält sich zum Halbmesser;
wie der Sinus von der Abweichung der Sonne
= 20° 14′,
zum Sinus der Amplitude.

Nehmet auf die Logarithmische der Sinus die Weite zwischen 38° 30′ und 20° 14′, setzt alsdann eine der Spitzen des Handzirkels auf 90°, die andere, zur Linken gedreht, wird auf 33¾ Grad der Amplitude der Sonne fallen.

4. Aufg. Man könnte noch, mittelst der Logarithmischen Linie der Sinus und Tangente,

die Stundenlinien einer horizontalen Sonnenuhr zeichnen; denn diese Aufg. läuft darauf hinaus, das 4te Glied von folgender Proportion zu finden:

der Halbmesser,
verhält sich zum Sinus der Breite;
wie die Tang. von der Entfernung der Sonne vom Meridian, für eine gegebene Stunde,
zu der Tang. vom den corresp. horizontalen Stundenwinkel.

Angenommen, die Breite sei die zu Paris = 48° 51′, und man wollte die Linie von einer Stunde zeichnen: so wird die obige Proportion:

sin. 90° : tg. 15° = sin. 48° 51′ : tg. x.

Um das 4te Glied zu haben, nimmt man auf die Logarithmische der Sinus die Weite von 90° zu 48° 51′, setzt man nun eine der Spitzen des Handzirkels auf 15° der Logarithmischen der Tangenten, so wird die andere Spitze, links gedrehet, 11° 26′ treffen, welches der Werth des durch den Meridian und der L. I^h, XI^h gebildeten Winkels ist.

Anmerk. Man kann sich ohne Unterschied dieser drei Linien oder der der Sinus und Tangenten bedienen, um die Seite 360 u. folgende dort gegeb. Aufg. zu lösen, die von der Aufsuchung des 4ten Gliedes einer Proportion abhängen; hierin, abgesehen von der Genauig-

keit, bestehet gerade der Unterschied zwischen den Auflösungen mittelst dieser Linien und durch die Zahlen; denn bei diesen ist es nicht gleichgültig, die natürlichen Sinus und Tangenten oder ihre Logarithmen zu gebrauchen.

Neuntes Kapitel.

Längenlinien.

Erkl. (Fig. 3bis) Man findet auf dem englischen Sector zwei Linien von gleicher Länge, längs der Kante, die eine bezeichnet mit Longitude und die andere mit Corde, die erste ist in 60 ungleiche, und die zweite ist, von Grad zu Grad, von 0° bis 90° getheilt. Der Anfang der einen von diesen zwei Linien corresp. dem Ende der andern, und umgekehrt. Die Chordenlinie dient, so zu sagen, nur als Index, das heißt, durch sie findet man, wie wir weiter unten sehen werden, den Werth von einem Grade eines jeden parall. Kreises in Theilen von Graden des Aequators, deren jeder eine englische Meile = 825,709 Toisen ist.

Construktion. Um die Anzahl der Aequato-

rialgrade, welche in einem Parallel-Kreise in der Breite von 44° 12′ enthalten sind, zu finden, oder das Verhältniß von diesem Grade zu dem des Aequators; macht man folgende Proportion:

der Halbmesser des Aequators = 1,
verhält sich zu dem Halbm. des Parallelkreises, oder cos. 44° 12′,
wie 1 Grad oder 60 englische Meilen;
zu der in einem Grade dieses Parallelkreises enthaltenen Anzahl Meilen.

Dieses 4te Glied ist = 43,02 englische Meilen, wenn man also Nr. 43 auf der Längenlinie mit Nr. 44¼ auf der Chordenlinie corresp. läßt, so ist klar, daß die Anzahl Aequatorial-Meilen, welche in jedem Parallelgrade enthalten sind, durch den Endpunkt der Breitensehne gegeben sein wird.

Setzt man in der Proport. cos. 15°, cos. 60°, so findet man 58 und 30, für die 4ten Glieder, zu Nr. 15 und 60 der Chordenlinie müssen also die Nr. 58 und 30 auf der Längenlinie correspondiren.

Gebrauch.

1. Aufg. Ein Schiff, in der Breite von 44° 12′, läuft 79 englische Meilen, man verlangt die Differenz in der Länge.

Aufl. Der Nummer $44\frac{3}{4}$ auf der Chordenlinie gegenüber findet man 43 auf der Längenlinie, welches anzeigt, daß der Bogen von einem Grad in dieser Breite = 43 engl. Meilen ist, oder daß eine Differenz von 43 engl. Meilen auf diesem Parallelkreise, deren eine von 60 engl. Meilen auf dem Aequator giebt; man hat daher die Proportion:

$$43 : 79 = 60 : x;$$

woraus $x = 110$ engl. Meilen, Unterschied in Länge, die in Grade berechnet $= 1° 50'$ ist.

Längen- und Stunden-Linien.

Man findet ferner, aber sehr selten, auf dem Sector, längs den Kanten zwei Linien, die eine bezeichnet Latitude und die zweite mit heure. Diese werden gemeinschaftlich gebraucht u. dienen, die Stundenlinien einer Sonnenuhr für eine gegebene Breite zu zeichnen. Wir werden weder ihre Constr. noch ihren Gebrauch beschreiben, weil man Tafeln für alle W. hat, welche durch die Mittagslinien und Stundenlinien für alle Abweichungen und Breiten gemacht worden, und da überdieß diese Aufgabe von der Aufsuchung des 4ten Gliedes einer Proportion abhängt, so kann man sie lösen, es sei durch natürliche Sinus- und Tangentenlinien, oder durch die

Logarithmische, wie wir Seite 385 ein Beispiel gegeben haben.

Wir beschließen diese Abhandlung mit der Auflösung einer oft in der Feldmeßkunst vorkommenden Aufgabe.

Aufg. Wenn die gegenseitige Lage der Punkte A, B, C, das heißt, die drei Winkel ABC, BCA, CAB, und die Entfernung dieser Punkte von einem innern Punkt D, oder DC, DB und DA gegeben sind, daraus die Längen der Seiten AB, BC und AC zu bestimmen (Fig. 39).

Aufl. Nachdem man einen Tr. EFG ähnlich dem Tr. ABC gezeichnet hat, theilt man (2. Aufg. Seite 286) die Seiten EG in H u. EF in I, so daß

$$EH : HG = AD : DC,$$

und $EI : IF = AD : DB$.

Man verlängert alsdann die Seiten EG, EF unbestimmt, und constr. mittelst der A. L., die 4ten Glieder der folgenden Proportionen:

$$EH - HG : HG = EH + HG : GK \quad \ldots\ldots (A)$$

$$EI - IF : IF = EI + IF : FM \quad \ldots\ldots (B).$$

Nachdem dieses geschehen, theilt man die Linien HK und IM in zwei gleiche Theile in N und L, und beschreibt aus diesen Punkten, als Mittelpunkte, mit

LH und IN Kreise, die sich in O schneiden, zieht man EO, FO und GO, so sind diese in demselben Verh. als AD, BD und CD.

Jetzt kennen drei Fälle eintreten.

1) daß die Linien EO, FO und GO gleich den gegebenen Linien AD, BD und DC;

2) daß sie kleiner;

3) daß sie größer seien.

Im ersten Falle werden die Entfernungen EF, FG u. EG nothwend. die Gesuchten sein: im zweiten Falle, verlängert man die ersten bis in P, R und Q, dergestalt, daß sie den zweiten gleich werden; dann werden die entstehenden Entfernungen PR, RQ und QP die gegebenen Punkte sein. Nach dem Gesagten sieht man, was im dritten Falle zu machen wäre.

Anmerkung. Es kann geschehen:

1) daß man zugleich EH = HG und EI = IF, habe; dann sind die Mittelpunkte L und N von den Punkten H und I unendlich weit entfernt, und der Punkt O ist der Durchschnitt zweier Perpendikel in H und I auf EG und EF. In der That geben die Proport. (A) und (B), für diesen Fall,

$$GK = \frac{(EH + HG) \cdot HG}{0} = \infty$$

$$FM = \frac{(EI + IF) \cdot IF}{0} = \infty.$$

2) Man habe bloß EH = HG: hier ist O durch den Durchschnitt eines Kreises und eines Perpendikels bestimmt.

3) Man habe EH < HG; so giebt alsdann die Proportion (A) GK negativ, welches anzeigt, daß der Mittelpunkt auf die andere Seite der verlängerten Grundlinie fallen muß. Dasselbe gilt von dem Mittelpunkt N, im Fall daß EI < IF ist.

Inhalt.

Erstes Kapitel.

Seite.
Construktion des englischen Proportionalzirkels . 277
Aufzählung der auf dem Sector gegebenen Linien . 280
Aufzählung der auf dem französischen Proportionalzirkel gezogenen Linien 282

Zweites Kapitel.

Erklärung und Construktion der arithmetischen Linie 282
Reductionstafel von einer Anzahl Zolle in Theilen der A. L. 284
1. Aufg. Eine gegebene Linie in einer beliebigen Anzahl gleicher Theile zu theilen 285
2. Aufg. Eine Linie in zwei Theile nach gegebenen Verh. zu theilen 286
3. Aufg. Aus der bekannten Anzahl gleicher Theile einer Linie zu finden, wie viel solcher Theile eine andere Linie enthält 288
4. Aufg. Von der beliebigen Anzahl gleicher Theile einer Linie eine beliebige Anzahl von diesen Theilen abzuschneiden 290

Seite.

5. Aufg. Durch Annäherung eine gerade Linie gleich einer gegebenen Peripherie zu finden . . 291

6. Aufg. Den P. Z. so zu stellen, daß die doppelte A. L. einen rechten Winkel bildet . . 291

7. Aufg. Zu drei gegebenen geraden Linien eine vierte Proportionale zu finden 293

8. Aufg. Wenn zwei nach einem unzugänglichen Punkt q laufende Linien VL und AB, der Lage nach nebst einem Punkt e gegeben sind, durch diesen Punkt eine Linie zu ziehen, die auch nach dem Punkt q läuft 296

9. Aufg. Einen Maßstab zu zeichnen, auf welchem 1 Theil, deren 25 auf dem Felde vorstellen . . 297

10. Aufg. Auf eine andere Weise eine gerade Linie in einer beliebigen Anzahl gleicher Theile zu theilen 299

Drittes Kapitel.

Erklärung und Construktion der geometrischen Linien 301

Tabelle der homologen Seiten von 64 ähnlichen Figuren unter der Annahme berechnet, daß die Seite der 64sten Figur 200 gleiche Theile enthalte . 304

1. Aufg. Einen Tr. zu construiren, der einem andern ähnlich ist, und mit ihm in einem gegebenen Verhältniß steht 307

2. Aufg. Das Verhältniß von zwei gegebenen ähnlichen Figuren zu finden. 309

3. Aufg. Den P. Z. so zu stellen, daß die geom. Linien einen rechten Winkel bilden . . . 311

Seite.

4. Aufg. Eine Figur zu zeichnen, die ähnlich und gleich zweien gegebenen ähnlichen Figuren . . 312

5. Aufg. Eine mittlere Proportionale zwischen zwei gegebenen geraden Linien zu finden . . . 314

6. Aufg. Eine Figur zu construiren, die gleich der Summe zweier beliebigen Figuren ist . . . 316

7. Aufg. Durch Annäherung ein Quadrat zu finden, welches gleich einem gegebenen Kreise ist . 317

8. Aufg. Den Durchmesser eines Kr. zu finden, der gleich einem gegebenen Quadrat ist . . 317

9. Aufg. Die Seite eines Quadrats zu finden, welches gleich einer gegebenen Ellipse ist . . . 318

10. Aufg. Eine Ellipse zu beschreiben, deren Axen in einem beliebigen Verh. sind, und deren Inhalt gleich dem Inhalt eines gegebenen Quadrats ist. 318

Viertes Kapitel.

Erklärung der Polygonlinien 319

Tabelle der Werthe der Seiten von 9 regulären Polygonen, in der Voraussetzung berechnet, daß die Seite des regulär. Vierseits 200 gl. Theile enthalte 321

1. Aufg. In einem gegebenen Kreise ein reguläres Polygon zu beschreiben 321

2. Aufg. Ueber einer gegebenen geraden Linie ein reguläres Polygon zu beschreiben 322

3. Aufg. Wenn FG die Seite eines regulären Siebenseits ist, die Anzahl der Seiten von einem über MN beschriebenen regulären Polygon zu finden. 323

Seite.

4. Aufg. Eine gegebene gerade Linie nach stetigem Verhältniß zu theilen 324

5. Aufg. Ueber einer gegebenen Grundlinie einen gleichschenkligen Triangel zu zeichnen, in welchen ein Winkel an der Grundlinie doppelt so groß ist als der Winkel an der Spitze 325

6. Aufg. Die Schenkel des Proportionalzirkels so zu stellen, daß die Polygonlinien einen rechten Winkel bilden 326

7. Aufg. Ein reguläres Polygon von einem gegebenen Inhalte zu zeichnen 327

Fünftes Kapitel.

Erklärung und Construktion der Kubischen Linie . 328

Tabelle der homologen Seiten von 64 ähnlichen Körpern in der Voraussetzung berechnet, daß die Seite des 64sten Körpers 200 gleiche Theile enthält 331

1. Aufg. Eine Pyramide zu zeichnen, welche einer gegebenen ähnl. und mit ihr in einem verlangten Verh. stehet 333

2. Aufg. Das Verhältniß zweier ähnl. Körper zu finden 336

3. Aufg. Den P. Z. so zu stellen, daß die Kubischen Linien einen rechten W. bilden . . . 339

4. Aufg. Einen Körper zu constr., der gleich und ähnlich zweien andern ähnlichen Körpern . . 341

Seite.

5. Aufg. Aus dem bekannten Durchmesser einer Kugel die Seiten von den fünf in dieser Kugel beschriebenen regulären Körpern zu finden . . 343

Lehnsatz. Wenn von vier Linien die drei ersten eine stetige Proportion bilden, überdem, der Kubus der dritten gleich dem Produkt der ersten mit dem Quadrate der vierten ist, so bilden diese vier Linien eine Reihe gleicher Verhältnisse . . 344

6. Aufg. Zwischen zwei gegebenen Linien, zwei mittlere Proportionallinien zu finden . . . 345

7. Aufg. Die Seite eines Würfels zu finden, welcher gleich dem Inhalte eines beliebigen Parallelepipeds ist 346

Sechstes Kapitel.

Gebrauch und Construktion der metallischen Linie, vom Gewichte der Kugeln, und von dem Kaliber des Geschützes 347

Gebrauch der Gewichtslinie der Kugeln . . . 349

Construktion 350

Kaliberstab für Geschütz 352

Construktion 352

Siebentes Kapitel.

Erklärung und Construktion der Chorden-, der Sinus-, Tangenten- und Secanten-Linien . . 353

Seite.

Erklärung der Chordenlinie 353
Construktion 354
Construktion der Tangentenlinie 356
Construktion der kleinsten Tangentenlinie . . 356
Construktion der Secantenlinie 356
Tangenten 357
Sinus 357
Chorden 357
Kleinste Tangenten 358
Secanten 358
Gebrauch der Chordenlinie 358

1. Aufg. Auf den Umfang eines gegebenen Kreises einen Bogen von einer gegebenen Anzahl Grade abzunehmen 358

2. Aufg. Aus dem dem bekannten Halbmesser eines Kreises die Anzahl Grade von einem gegebenen Bogen zu finden 360

3. Aufg. Aus der bekannten Anzahl Grade eines Bogens den Halbm. zu finden 361

4. Aufg. Den Proportionalzirkel so zu stellen, daß die Chordenlinien einen Winkel von gegebenen Graden bilden 363

5. Aufg. Den Winkel zu finden, welchen die Chordenlinien bei einer beliebigen Stellung der Schenkel des P. Z. bilden 363

6. Aufg. Eine gerade Linie nach dem goldenen Schnitte zu theilen 364

Seite.

Gebrauch der Sinus, Tangenten- und Secanten-Linien 365

7. Aufg. Der Halbmesser sei 2 Zoll, den Sinus 28° 30′ und Tangente 28° 30′ zu finden . . 365

8. Aufg. Für denselben Halbmesser die Secante 18° 30′ zu finden 365

9. Aufg. Die Tangente von einem Winkel der über 45°, z. B. Tang. 60° zu finden . . . 365

Tabelle der natürlichen Tangenten und Secanten für Winkel über 75° für den Halbmesser = 1 . 366

Gebrauch dieser Tabelle 367

10. Aufg. Die Tangente 78° für einen Halbmesser von zwei Zoll, mittelst der größten Tangentenlinie zu finden 368

11. Aufg. Die Secante 78° für denselben Halbm. ohne Hülfe der vorhergehenden Tafel zu finden . 268

12. Die correspond. Anzahl Grade zu einer gegebenen Tang. für einen bekannten Halbm. zu finden. 369

13. Aufg. Zu einer für einen bekannten Halbmesser gegebenen Secante die entsprechende Anzahl Grade zu finden 370

14. Aufg. Aus dem gegebenen Sinus, Tangente und Secante, nebst der ihnen entsprechenden Anzahl Grade, den Halbmesser zu finden 370

15. Aufg. Aus dem Halbmesser, nebst den gegebenen Sinus, Tangente und Secante die entsprechende Anzahl Grade zu finden 371

Seite.

16. Aufg. Aus dem Halbmesser und gegebenen Anzahl Grade den zugehörigen Sinus versus zu finden 371

17. Aufg. Aus den beiden Catheten eines rechtw. Tr., die Hypotenuse zu finden 372

18. Aufg. Wenn die Cathete AB = 30 und der Winkel BCA = 37°, die Hypotenuse BC zu finden 373

19. Aufg. Wenn die Hypotenuse und eine Cathete gegeben sind, die andere Cathete zu finden . . 373

20. Aufg. Wenn die Hypotenuse und der Winkel ACB gegeben ist, die andere Cathete zu finden . 374

21. Aufg. Wenn beide Catheten gegeben sind, den W. BCA zu finden 374

22. Aufg. Aus zwei gegebenen Seiten und dem davon eingeschlossenen Winkel die dritte Seite des Tr. zu finden 375

23. Aufg. Aus zwei W. CAB, ACB, nebst der Seite CB, die Seite AB zu finden . . . 375

24. Aufg. Aus den drei gegebenen W. eines Tr. das Verh. zwischen den Seiten zu finden . . 376

25. Aufg. Aus den drei gegebenen Seiten eines Tr. den Winkel ACB zu finden 376

26. Aufg. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen sphärischen Triangels ABC = 43°, und Winkel CAB = 20°, die Seite CB zu finden . . . 377

27. Aufg. Wenn in einem rechtwinkligen sphärischen Triangel die Cathete BC und die Hypotenuse

Seite.

tenuse AC gegeben sind, die andere Cathete AB zu finden 377

28. Aufg. Ueber einer gegebenen Linie BC ein Kreissegment zu beschreiben, welches einen gegebenen W. faßt 378

29. Aufg. Eine Ellipse über gegebene Achsen zu zeichnen 380

Achtes Kapitel.

Logarithmischer Maßstab 381

Erklärung und Construction der Logarithmischen L. der Zahlen 381

Construction der Logarithmischen Linie der Sinus und Tangenten 383

Gebrauch der Log. Linie. 384

1. Aufg. $4 : 32 = 18 : x$. 385

2. Aufg. $R : \sin.30°17' = 120 : x$ 385

3. Aufg. Cos. der Breite 51°30′ zum Halbm., wie der Sin. der Declination der Sonne = 20°14′ zu dem Sin. der Amplitude 385

4. Aufg. Sin. Totus zu dem Sin. der Breite, wie die Tang. der Entfernung der Sonne vom Meridian, für eine gegebene Stunde, zu der Tang. des corresp. horizontalen Stundenwinkels . . . 385

Neuntes Kapitel.

Linie der Längen 387

Erklärung und Construction 387

Seite.

1. Aufg. Ein Schiff, in der Breite von 44° 12′ läuft 79 engl. Meilen, man verlangt den Unterſch. in der Länge 388

Längen- und Stunden-Linien 389

2. Aufg. Wenn die correſp. Lage der drei P. A, B, C, d. h., wenn die drei W. ABC, BCA, CAB, u. die Entfernung dieſer Punkte von einem innern Punkt D, oder DC, DB und DA gegeben ſind, die Länge der Seiten AB, BC und AC zu beſtimmen 390

Anhang

enthaltend

Geometrische Aufgaben

für

nützlichen Uebung für Anfänger.

Von

J. P. Grüson.

Sieben und zwanzig aufgelöst'te Aufgaben

über

einen Berührungskreis unter gegebenen Bedingungen zu beschreiben.

Da die Construktionen von dem größten Theil der folgenden aufgelöst'ten Aufgaben leicht zu rechtfertigen sind, so begnügen wir uns, der Kürze wegen, die Constr. davon anzuzeigen, ohne sie zu beweisen. Aus demselben Bewegungsgrunde überheben wir uns von einer jeden die Anzahl der Auflösungen aufzuzählen, und die Umstände zu erwähnen, unter welchen sie unmöglich werden können.

1. Aufg. Aus einem als Mittelpunkt gegebenen Punkte einen Kreis zu beschreiben, der durch einen andern gegebenen Punkt gehet.

Aufl. Nehmet die Entfernung zwischen diesen Punkten als Halbmesser.

2. Aufg. Aus einem als Mittelpunkt gegebenen Punkte einen Kreis zu beschreiben, der eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt.

Aufl. Nehmet die Länge des aus dem gegebenen Punkte auf der gegebenen Linie gefällten Perpendikels als Halbmesser.

3. Aufg. Aus einem als Mittelpunkt gegebenen Punkte einen Kreis zu beschreiben, der einen der Lage und Größe nach gegebenen Kreis berührt.

Aufl. Nehmet als Halbmesser die Entfernung des gegebenen Punktes von einem der Endpunkte desjenigen Durchmessers des gegebenen Kreises, dessen Richtung durch den gegebenen Punkt gehet.

4. Aufg. Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt in einer der Lage nach gegebenen Linie liegt, und durch einen gegebenen Punkt gehet.

Aufl. Als Mittelpunkt nehmet irgend einen der Durchschnittspunkte der gegebenen geraden Linie mit einem aus dem gegebenen Punkte mit dem bekannten Halbmesser beschriebenen Kreise.

5. Aufg. Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt in einer gegebenen Peripherie liegt, und durch einen gegebenen Punkt gehet.

Aufl. Als Mittelpunkt nehmet irgend einen der Durchschnittspunkte des gegebenen Kreises mit einem aus dem gegebenen Punkte mit dem bekannten Halbm. beschriebenen Kreise.

6. Aufg. Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, der seinen Mittelpunkt in einer der Lage nach gegebenen geraden Linie hat, und eine andere der Lage nach gegebene gerade Linie berührt.

Aufl. Als Mittelpunkt nehmet denjenigen Punkt, in welchem die erste der zwei gegebenen Linien durch eine der zwei, mit der zweiten in einer dem gegebenen Halbmesser gleichen Entfernung gezogenen, Parallelen geschnitten wird.

7. Aufg. Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, der seinen Mittelpunkt in einer gegebenen Peripherie hat, und eine der Lage nach gegebene Linie berührt.

Aufl. Als Mittelpunkt nehmet einen der Punkte, in welchen die gegebene Peripherie durch ein oder zwei, mit der gegebenen Linie in einer dem gegebenen Halbm. gleiche Entfernung gezogenen Parallelen geschnitten wird.

8. Aufg. Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, der seinen Mittelpunkt in einer der Lage nach gegebenen geraden Linie hat, und einem der Lage und Größe nach gegebenen Kreis berührt.

Aufl. Als Mittelpunkt nehmet einen der Punkte, in welchen die gegebene gerade Linie durch einen, mit dem gegebenen concentrischen, Kreis geschnitten wird, dessen Halbmesser gleich der Summe oder der Differenz seines und des gegebenen Halbm. ist.

9. Aufg. Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt in einer gegebenen Peripherie liegt und einen der Lage und Größe nach gegebenen Kreis berührt.

Aufl. Als Mittelpunkt nehmet einen von den zwei Punkten, in welchen die gegebene Peripherie durch einen, mit dem gegebenen concentrischen, Kreis

geschnitten wird, dessen Halbmesser gleich der Summe oder der Differenz seines und des gegebenen Halbmessers ist.

10. Aufg. Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei gegebene Punkte gehet.

Aufl. Als Mittelpunkt nehmet einen von den zwei Durchschnittspunkten der beiden Kreise, deren Mittelpunkt die gegebenen Punkte und deren gemeinschaftlicher Halbmesser der gegebene Halbmesser ist.

11. Aufg. Einen Kreis mit einem gegebenen Halbmesser zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt gehet und eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt.

Aufl. Als Mittelpunkt nehmet einen von den Punkten, in welchen ein aus dem gegebenen Punkte mit dem gegebenen Halbmesser beschriebener Kreis geschnitten wird, durch eine von den beiden zu der gegebenen Linie in einer dem gegebenen Halbm. gleichen Entfernung gezogenen Parallelen.

12. Aufg. Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, der zwei der Lage nach gegebene gerade Linien berührt.

Aufl. Als Mittelpunkt nehmet irgend einen der Durchschnittspunkte der zwei zu einer dem gegebenen Halbm. gleichen Entfern. gezogenen Parallelen, mit einer von den zu der andern gegebenen Linie in derselben Entfernung gezogenen Parallelen.

13. Aufg. Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt gehet und einen der Größe und Lage nach gegebenen Kreis berührt.

Aufl. Als Mittelpunkt nehmet einen von den beiden Punkten, in welchen der aus dem gegebenen Punkte mit dem gegebenen Halbm. beschriebene Kreis geschnitten wird, durch einen mit dem gegebenen concentrischen Kreis, dessen Halbmesser gleich der Summe oder der Differenz seines und des gegebenen Halbmessers ist.

14. Aufg. Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, der eine der Lage nach gegebene gerade Linie und einen der Größe und Lage nach gegebenen Kreis berührt.

Aufl. Als Mittelpunkte nehmet einen der P., in welchen eine von den zwei mit der gegebenen Linie in einer dem gegebenen Halbm. gleichen Entfer-

nung gezogenen Parallelen geschnitten wird, durch einen mit dem gegebenen concentrischen Kreis, dessen Halbm. gleich der Summe oder Differenz seines und des gegebenen Halbmessers ist.

15. Aufg. Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, der zwei der Größe und Lage nach gegebene Kreise zugleich berührt.

Aufl. Als Mittelpunkt nehmet einen von den Durchschnittspunkten der zwei mit dem gegebenen, concentrischen Kreise, deren respektive Halbm. gleich der Summe oder der Differenz ihrer und des gegebenen Halbm. ist.

16. Aufg. Einen Kreis zu beschreiben, der seinen Mittelpunkt in einer der Lage nach gegebenen geraden Linie hat, und durch zwei gegebene Punkte gehet.

Aufl. Als Mittelpunkt nehmet den Punkt, in welchem die gegebene Linie durch den in der Mitte der, beide Kr., gegebenen P. verbindenden L. errichteten Perpendikel geschnitten wird. Zieht man alsdann nur einen von den gegebenen Punkten in Betracht, so ist die Aufgabe auf die erste zurück gebracht.

17. Aufg. Einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt in einer gegebenen Peripherie liegt, und durch zwei gegebene Punkte geht.

Aufl. Als Mittelpunkt nehmet einen der P., in welchen die gegebene Peripherie, durch den, in der Mitte der beide gegebenen Punkte verbindenden Linie, errichteten Perpendikel, geschnitten wird. Betrachtet man alsdann nur einen der gegebenen P., so ist die Aufg. auf die zweite zurück geführt.

18. Aufg. Einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt in einer der Lage nach gegebenen geraden Linie ist, durch einen gegebenen Punkt gehet und eine andere der Lage nach gegebene gerade Linie berührt.

Aufl. Fället aus dem gegebenen Punkte auf die erste der gegebenen Linien einen Perpendikel, und verlängert ihn über die Linie hinaus, um seine eigene Länge: auf diese Weise bekommt man einen neuen Punkt des gesuchten Kreises: die Aufg. ist also darauf zurück geführt, einen Kreis zu beschreiben, der, indem er durch 2 gegebene Punkte geht, eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt; eine Aufg., die man zu lösen weiß. Siehe Leslies geom. Analysis Seite 110 und Seite 241 II. Aufg.

Anmerk. Der geometrische Ort des gesuchten Mittelp. ist eine Parabel, deren Brennpunkt der gegebene P. und die zu berührende Linie die Directrice ist, die zwei Punkte, in welchen diese Parabel die erste Linie schneidet, sind die verlangten Mittelpunkte.

19. Aufg. Einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt in einer gegebenen Peripherie liegt, der durch einen gegebenen Punkt gehet und eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt.

Aufl. Diese Aufg. scheint durch die Elemente nicht auflösbar.

Anmerk. Man beschreibe eine Parabel, deren Brennpunkt der gegebene Punkt und deren Directrice die gegebene Linie ist. Die Durchschnittspunkte der Parabel mit der gegebenen Peripherie sind die gesuchten Mittelpunkte.

20. Aufg. Einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt in einer der Lage nach gegebenen Linie liegt, und zwei andere der Lage nach gegebene gerade Linien berührt.

Aufl. Als Mittelpunkt nehmet den Punkt, in welchem die erste der gegebenen geraden Linien durch die Halbirungslinien der 4 durch die beiden andern gebildeten Winkel geschnitten wird. Betrachtet man

nun bloß eine von diesen zwei Linien, so ist die Aufg. auf die zweite Aufg. zurück gebracht.

21. Aufg. Einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt in einer gegebenen Peripherie liegt, und zwei der Lage nach gegebene gerade Linien berührt.

Aufl. Als Mittelpunkt nehmet einen von den Punkten, in welchen die gegebene Peripherie durch eine von den geraden Linien geschnitten wird, welche die 4 durch die zwei gegebenen geraden L. gebildeten W. halbiren. Betrachtet man alsdann nur eine von diesen geraden Linien, so ist die Aufg. auf die zweite Aufg. zurück geführt.

22. Aufg. Einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt in einer der Lage nach gegebenen geraden Linie liegt, der durch einen gegebenen Punkt geht, und einen der Größe und Lage nach gegebenen Kreis berührt.

Aufl. Aus dem gegebenen Punkt fället, auf die gegebene Linie, einen Perpendikel, den man über die Linie hinaus um sich selbst verlängert; man erhält auf diesem Wege einen neuen Punkt des gesuchten Kr. Die Aufg. findet sich daher dahin gebracht, einen Kreis zu beschreiben, der, indem er durch zwei

gegebene Punkte gehet, einen gegebenen Kreis berührt; eine Aufgabe, die man zu lösen weiß. Siehe Leslies geom. Analysis Seite 115 und Seite 241, III. Aufg.

23. Aufg. Einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt in einer gegebenen Peripherie liegt, durch einen gegebenen Punkt gehet und einen der Größe und Lage nach gegebenen Kreis berührt.

Diese Aufg. scheint durch die Elemente nicht auflösbar.

Anmerk. Man beschreibe eine Hyperbel, deren Brennpunkte die gegebenen Punkte und der Mittelpunkt des gegebenen Kreises sind, und deren Queeraxe = dem Halbm. des gegebenen Kreises ist.

24. Aufg. Einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt in einer der Lage nach gegebenen geraden Linie liegt, eine der Lage nach gegebene Linie und einen der Größe und Lage nach gegebenen Kreis berührt.

Aufl. Durch den Durchschnittsp. der beiden gegebenen geraden Linien ziehet eine dritte, welche mit der ersten auf einer andern Seite denselben W. macht, als die zweite mit der ersten, auf solche Art

hat man eine zweite Tangente an den gesuchten Kr.; die Aufg. ist solchergestalt darauf zurück gebracht, einen Kreis zu beschreiben, der zwei der Lage nach gegebene gerade Linien und einen der Größe und Lage nach gegebenen Kreis berührt. Siehe Leslies geom. Analysis Seite 122 XXXI. Satz, und Seite 259. VIII. Aufgabe.

25. Aufg. Einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt in einer gegebenen Peripherie liegt, eine der Lage nach gegebene gerade Linie und einen der Größe und Lage nach gegebenen Kreis berührt.

Aufl. Diese Aufg. scheint nicht auflösbar, man kann sie indessen wenigstens leicht auf die 19te Aufg. zurück führen. In der That, wenn man einen Kreis beschr., dessen Mittelpunkt in der gegebenen Periph. liegt, durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises geht und eine von den zwei in der Entfernung des Halbm. dieses Kreises zu der gegebenen Linie gezogenen Parallelen berührt, so ist sein Mittelp. der des gesuchten Kreises; betrachtet man also nur noch die gegebene gerade Linie, so würde diese Aufg. auf die zweite Aufg. zurück geführt sein.

26. Aufg. Einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt in einer der Lage nach gegebenen Linie

Linie liegt, und zwei der Größe und Lage nach gegebene Kreise berührt.

Aufl. Aus dem Mittelp. von irgend einem der beiden gegebenen Kreise fället auf die gegebene gerade Linie einen Perpend., den man über diese Linie um sich selbst verlängert; aus seinem Endp., als Mittelp., und mit dem Halbm. des nämlichen Kreises beschr. einen neuen Kr.; so müßte der gesuchte Kr. diesen auch berühren. Man hätte also einen Kreis zu beschreiben, der drei der Größe und Lage nach gegebene Kreise berührt. Siehe Leslies geom. Analysis Seite 265, X. Aufgabe.

27. Aufg. Einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt in einer gegebenen Peripherie liegt, und zwei der Größe und Lage nach gegebene Kreise berührt.

Aufl. Diese Aufg. scheint nicht durch die Elemente auflösbar; man kann sie aber wenigstens leicht auf die 23ste Aufg. zurückbringen. In der That, wenn man zu einem der beiden gegebenen Kreise einen concentrischen Kreis beschreibt, dessen Halbm. gleich der Summe oder der Differenz ihrer Halbm. ist; ferner einen Kreis beschreibt, dessen Mittelp. in der gegebenen Peripherie liegt, den letztern Kreis berührt, und durch den Mittelp. des andern geht: so ist sein

Mittelp. der des gesuchten Kreises; dergestalt, daß wenn man nur noch einen einzigen der gegebenen Kr. betrachtet, die Aufg. alsdann auf die 3te Aufg. zurückgebracht ist.

Anmerk. I. Aus dem Vorhergehenden erhellet, daß von den 27 vorgelegten Aufg. nur 4 da sind, deren Auflösung einige Hindernisse darbieten könnte; und überdem lassen sich noch zwei von diesen leicht auf die beiden andern zurückführen; so daß die ganze Schwierigkeit einzig in der 19ten und 23sten Aufg. liegt. Ich habe bei den genannten 2 Aufg. gezeigt, daß es bei ihrer Aufl. darauf ankommt, die Durchschnitte eines gegebenen Kreises mit einem Kegelschnitt zu bestimmen, der nicht gezeichnet ist, und von dem man nur die Elemente hat; und ich glaube in der That nicht, daß diese Aufg. durch eine begrenzte Anzahl mit dem Lineal und dem Zirkel allein ausgeführter Operationen aufgelöst werden können.

Anmerk. II. Da die Punkte und die geraden Linien nur Kreise sind, deren respect. Halbm. Null und unendlich sind, so folgt hieraus, daß die 27ste Aufg. die 11 vorhergehenden implicite einschließt; daß die 15te die 5 ihr vorhergehenden, daß es sich eben so mit der 9ten verhält, und endlich daß die 3te implicite die beiden ersten enthält. Solchergestalt sind eigentlich hier überhaupt nur 4 Aufg. Die letzte scheint aber nur in besondern Fällen auflösbar.

Erkl. Eine Linie oder eine Oberfläche, welche alle die Punkte enthält, die der Aufg. genügen, heißt der geometrische Ort dieser Aufg.

Die alten Geometer unterschieden unter den Oertern der ersten Gattung ebene, körperliche, und lineärische Oerter (loca plana, solida, linearia, oder τοποι ἐπιπεδοι, στερεοι, γραμμικοι).

Die ebenen waren ihnen die gerade Linie und die Kreislinie; körperliche, die drei Kegelschnitte, Parabel, Ellipse und Hyperbel; lineärische, alle andere Curven, als die Conchoide, Cissoide, Spirale, Quadratrix. Die Kegelschnitte heißen körperliche Oerter, weil sie Schnitte eines Körpers sind, und als solche betrachtet werden; die Entstehung der geraden Linie und des Kreises aber in einer Ebene gedacht werden kann. Die geometrischen Oerter dienen zur Auflösung unbestimmter Aufgaben.

In meinem Versuch einer Wiederherstellung der Bücher des Apollonius von Pergä von den Berührungen, den ich als Anhang zu Leslies geom. Analysis, Berlin 1822, gegeben habe, schränkte ich mich auf die Angabe der ebenen Oerter ein, obgleich einige hier vorkommende Aufg. auch körperliche Oerter erfordern. — Ich will sie hier mittheilen:

Leslie, Seite 238 II. Aufg., wird der geom. Ort von dem Mittelp. m^{III} eines Kreises K^{III} verlangt, welcher durch einen gegebenen Punkt P geht, und eine der Lage nach gegebene Linie L berührt.

Aufl. Der geom. Ort von m''' ist eine Parabel, deren Brennpunkt P und deren Directrice L ist. Fällt P in L, so verwandelt sich die Parabel in eine auf L in P perpend. Linie.

Eben daselbst wird in der III. Aufg. verlangt, den geom. Ort von m''' eines Kreises zu bestimmen, welcher durch den gegebenen P. P gehet, und einen gegeb. Kr. K, dessen Halbmesser r und Mittelp. m ist, berührt.

Aufl. Wenn P außerhalb des Kreises K liegt, so ist der geom. Ort von m''' eine Hyperbel, deren Brennpunkte P und m und deren Querachse r ist.

Liegt P innerhalb des Kr. K, so ist der geom. Ort von m''' eine Ellipse, deren Brennp. P und m, und deren große Achse r ist.

Fällt P in der Prph. von K, so verwandelt sich die Hyperbel oder die Ellipse in eine durch P und m gehende gerade Linie.

Eben daselbst S. 239 IV. Aufg. (b) die L. L, L' bilden 4 W., und deren 2 zwei Halbirungsl. sind der geom. Ort von m'''.

Eben daselbst die V. Aufg. (b). Hier ist der geom. Ort von m''' eine Parabel, deren Brennp. m, und deren Directrice prll. mit L, und von m um r weiter als L entfernt liegt.

Eben daselbst verlangt die VI. Aufg., einen Kr. K''' zu finden, welcher zwei Kreise K, K', deren Halb-

messer r, r′ und Mittelpunkte m, m′ gegeben sind, berührt. Liegen die Kr. K, K′ ganz außerhalb oder berühren sie sich von außen, so ist der geom. Ort von m‴ eine Hyperbel, deren Brennp. m u. m′ u. deren Querachse die Differenz der Halbm. r′ u. r ist.

Wenn sich K, K′ schneiden, so ist der geom. Ort von m‴, wenn K, K′ von außen berührt werden sollen, eine Hyperbel wie vorher, sollen sie aber von innen berührt werden, so ist der geom. Ort von m‴ eine Ellipse, deren Brennp. m, m′ u. deren große Achse $= r + r'$ ist. Dieses letztere ist auch der Fall, wenn einer von beiden Kreisen K, K′ den andern von innen berührt, oder ganz in ihm liegt.

Die folgenden geom. Aufg. und Lehrs. sind so geordnet, daß ihre Aufl. aus den Sätzen, welche in den angezeigten Abschnitten von Grüsons Systematischem Leitfaden der reinen Mathematik, Berlin 1822, stehen, gefunden werden kann.

Lehrsätze und Aufgaben
zu dem
ersten Abschnitt der Geometrie.

1. Aufg. Auf einer gegebenen geraden Linie in deren Endpunkt einen Perpend. zu errichten.
   1) Man verlangt eine Constr., die keine Theorie der Parallelen voraussetzt.
   2) Constructionen, bei welchen die Theorie der Parallelen vorausgesetzt wird.
2. Aufg. Die Hälfte eines gegebenen Winkels anzugeben, ohne ihn zu halbiren, auf demselben Wege den 4ten, 8ten . . . allgemein den 2^n Theil eines bekannten Winkels anzugeben.
3. Aufg. Umgekehrt auf der vorhergehenden Art das 2, 4, 8 . . . allgemein das 2^n Fache eines bekannten Winkels anzugeben.
4. Aufg. Auf obrige Art einen Winkel zu zeichnen, der gleich einem halben Rechten.
5. Aufg. Zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels eine gegebene gerade Linie unter gegebenen Winkeln einzutragen.

6. Lehrs. Wenn eine gerade Linie einen W. eines Tr. halbirt, aber die Gegenseite des W. in ungleiche Abschnitte theilt, so sind die den halbirten W. einschließenden Seiten ungleich, und zwar liegt dem größten Abschnitte die größere Seite an.

7. Lehrs. Sind zwei Seiten eines Tr. ungleich, so schneidet eine gerade, welche den von ihnen eingeschlossenen W. halbirt, die dritte Seite in ungleiche Abschnitte, deren größerer der größern Seite anliegt.

8. Lehrs. Sind zwei Seiten eines Tr. ungleich, so theilet die gerade, die dritte Seite halbirende, den von jenem eingeschlossenen W. in ungleiche Winkel.

9. Lehrs. Wenn eine gerade Linie einen W. eines Tr. und die Gegenseite halbirt; so sind die übrigen Seiten gleich oder der Tr. ist gleichschenklig.

10. Aufg. Innerhalb eines rechtwinkl. oder stumpfwinkl. Tr. einen Punkt zu bestimmen, aus welchem zwei gerade Linien nach einer der, den rechten (oder stumpfen) W. einschließenden, Seiten gezogen zusammen größer, als die übrigen Seiten des Tr. zusammen sind.

11. Aufg. Innerhalb eines ungleichseitigen Tr. einen Punkt zu bestimmen, aus welchem sich nach der größten Seite zwei gerade Linien ziehen lassen, die an diesem Punkt einen W. bilden, kleiner als der Gegenwinkel der größern Seite.

12. Lehrs. Gehen von einerlei Punkte zwei gerade Linien in entgegengesetzten Richtungen so aus, daß sie, jede für sich, mit einerlei dritten geraden Linie parall. sind: so machen sie mit einander eine gerade aus.

13. Lehrs. Sind in zwei Tr. zwei W., imgleichen ihre Gegenseiten gleich, und kommt von den andern mit jenen an derselben Seite liegenden W. der eine dem rechten näher, als der ihm gleichliegende in den andern Tr.: so ist die Gegenseite des erstern größer als die Gegenseite des andern kleinern Winkels.

14. Lehrs. 1) Die gerade Linie, welche die Mitten von zwei Seiten eines Tr. verbindet, schneidet davon einen zweiten Triangel gleich $\frac{1}{4}$ des erstern ab; 2) die geraden Linien, welche die Mitten der Seiten eines Tr. verbinden, bilden einen andern Triangel gleich $\frac{1}{4}$ des erstern. Halbirt man wieder die Seiten dieses Tr., so ergiebt sich abermals ein Tr. der gleich $\frac{1}{4}$ von ihm ist: setzt man diese Halbir. der Seiten mit jedem folgenden Tr. fort, so ist die Summe der unendlich vielen auf diese Weise entstehenden Tr. gleich $\frac{1}{3}$ des ersten.

15. Lehrs. Die gerade Linie, welche die Mitten von den Diag. eines prll. Trap. verbindet, ist zu den beiden prll. Seiten prll. u. gl. ihrer halben Differenz.

16. Lehrs. Die Mitten der Seiten von einem beliebigen Vierseit, sind die Winkelspitzen eines Parallelogramms welches gleich der Hälfte des Vierseits ist. Halbirt man wieder jede Seite des entstandenen Prllgrms., so ergiebt sich immer ein neues Prllgrm. gleich der Hälfte des vorhergehenden. Die Summe dieser unendlich vielen auf solche Art gebildeten Prllgrm. ist gleich dem doppelten ersten Parallelogramm.

17. Lehrs. Wenn man aus den Mitten der Gegenseiten zu den Mitten der Diagon. eines beliebigen Vierseits gerade Linien zieht, so ist die entstehende Figur ein Parallgrm., dessen Seiten resp. die Hälften von den beiden andern Gegenseiten sind.

18. Lehrs. Die geraden Linien, welche die Mitten der Gegenseiten und die Mitten der Diag. eines beliebigen Vierseits verbinden, gehen alle durch einerlei Punkt, und jede ist in diesem Punkt halbirt.

19. Lehrs. Ein Triangel ist gleichschenklig: 1) wenn die gerade aus der Spitze zu der Mitte der Grdl. gezogene Linie den Winkel an der Spitze halbirt; 2) wenn die gerade aus der Spitze zu der Mitte der Grundlinie perpend. auf diese Grundlinie ist; 3) wenn die Halbirungslinie des W. an der Spitze perpend. auf die Grundl. ist.

20. Lehrs. Zwei gleichschenkl. Tr. sind congr., wenn ihre Grdl. nebst den W. an der Spitze gleich sind.

21. Lehrs. Zwei Tr. sind congr., wenn ihr Umfang, eine Seite und ein anliegender W. gleich sind.

22. Lehrs. Zwei Triangel sind congr., wenn ein W. und zwei aus dem W. auf die Gegenseiten gezogene Perpd. einzeln gleich sind.

23. Lehrs. Wenn man durch die Mitte einer geraden Linie, welche durch zwei Parallelen begrenzt wird, eine Prll. zu diesen zieht, so halbirt diese Prll. jede andere durch jene Prllen. begrenzte gerade Linie.

24. Lehrs. Wenn die Diag. eines Vierseits sich gegenseitig halbiren, so ist dieses Vierseit ein Parallelogramm.

25. Lehrs. Wenn man aus den Mitten der Schenkel eines gleichschenkligen Tr. auf der Grdl. Prpd. fällt, jede gleich der Hälfte dieser Schenkel, so bilden die Entfernungen der Endp. von diesen Prpd. unter sich und von den gleichen Schenkeln eine gebrochene Linie, die gleich der Grundlinie ist.

26. Lehrs. Jede durch die Mitte der Diag. eines Prllgrm. gezogene und am Umfange begrenzte gerade Linie ist in gedachtem Punkt halbirt, und zerlegt das Prllgm. in zwei congruente Hälften.

Anmerk. Dieser Satz gilt von allen symetrischen Figuren, d. h. von Figuren, deren Gegenseiten parallel und gleich sind.

27. Lehrs. Wenn man durch die Mitten zweier Gegenseiten eines Prllgrm. zwei gerade Linien nach dem Endp. einer und derselben Diag. zieht, so theilen diese Linien die andere Diag. in drei gleiche Theile und sind einander parallel.

28. Lehrs. Ein in einem Prllgm. beschr. Tr., dessen Scheitel in den Seiten des Prllgm. liegen, ist kleiner als die Hälfte des Prllgms.

29. Lehrs. Wenn man durch die Mitte von zwei Gegenseiten eines Prllgm. zwei gerade Linien nach dem Endp. einer Diag. zieht, und durch die Mitten der beiden andern Seiten auch zwei Linien nach dem Endpunkte der andern Diag. zieht, so theilen diese 4 geraden Linien das gegebene Prllgm. in 9 Figuren, welche, gehörig vereint, 5 congr. Parallelogramme geben.

Zusatz. Man kann also immer ein gegebenes Parallelogramm in 5 congr. Prllgrm. theilen, und umgekehrt, aus 5 congr. Prllgrmm. ein einziges Prllgrm. machen. Ist das Prllgrm. ein Quadrat, so sind die 5 Prllgrm. Quadr.

30. Lehrs. Zwei prll. Trapeze sind congr.: 1) wenn die 4 Seiten einzeln einander gleich sind; 2) wenn sie zwei Winkel und zwei Gegenseiten respective gleich haben.

31. Lehrs. Die zwei geraden Linien, welche aus der Winkelspitze eines Odrts. ausgehen, und mit der anliegenden Seite einen Winkel gleich $\frac{1}{6}$ Rechte bilden, bestimmen auf den Gegenseiten die zwei andern Scheitel eines gleichseitigen Triangels.

Dasselbe findet Statt, wenn die zwei geraden Linien aus der Mitte einer Seite auslaufen, und mit dieser Seite zwei gleiche W. jeder von $\frac{2}{3}$ Rechte bilden.

32. Lehrs. Wenn man, indem man den Umfang eines Quadrats durchläuft, Punkte bezeichnet, die gleich weit von den Winkelspitzen entfernt liegen, so sind diese Punkte die Scheitel von einem andern in dem erstern beschr. Quadrate.

33. Lehrs. Wenn man, indem man den Umfang eines Quadrats durchläuft, Linien durch die Winkelspitzen zieht, welche mit den aufeinander folgenden Seiten gleiche W. machen, so bilden diese 4 Linien ein um den erstern beschr. Quadrat.

34. Lehrsatz. Wenn man in einem Schenkel eines gegebenen W. einen Punkt nimmt, und aus demselben auf beide Schenkel Perpd. errichtet, so ist die durch den Scheitel begrenzte Halbirungslinie des durch die Perpd. gebildeten W., die Grdl. eines gleichschenkligen Tr., dessen Scheitel der gegebene Winkel ist.

35. Aufg. Einen Tr. zu zeichnen, wenn eine Seite und die Prpd. aus den Endp. dieser Seite auf den Gegenseiten gegeben sind.

36. Aufg. Einen Triangel zu zeichnen, wenn eine Seite als Grdl., die Höhe, und der Perpd. aus einem der Endp. auf die Gegenseite gegeben sind.

37. Aufg. Einen Triangel zu zeichnen, wenn der Umfang und zwei W. gegeben sind.

38. Aufg. Einen Tr. zu zeichnen, wenn eine Seite, ein anliegender W., und die Summe oder Differenz der beiden andern Seiten gegeben sind.

39. Aufg. Einen Tr. zu zeichnen, wenn eine Seite, der Gegenwinkel, und die Summe oder Differenz der beiden andern Seiten gegeben sind.

40. Lehrs. In zwei rechtw. und gleichschenklig. Tr. sind die Rektangel aus je zwei nicht homologen Seiten, die aber zu gleichen W. gehören, einander gleich.

Wenn A, B, C die Seiten eines rechtw. Tr. und a, b, c die homologen Seiten des andern rechtw. Tr. sind, so soll sein:

1) $A \cdot b = a \cdot B$; 2) $A \cdot c = a \cdot C$; 3) $B \cdot c = b \cdot C$.

41. Erkl. Wenn man von einem Punkt auf eine gerade Linie oder auf eine Ebene einen Perpd. fallen läßt, so ist der Punkt, in welchem der Perpd. die Linie oder Ebene trifft, die Projection dieses Punktes auf jener Linie oder Ebene. Die Projection einer geraden Linie

auf einer geraden Linie oder Ebene ist wieder eine gerade Linie, die zwischen den Projectionen ihrer Endp. liegt. In zusammengesetzten Fällen dürfte es nützlich sein, durch eine gute Bezeichnung die Projection von einer Linie auf einer andern verständlich darzustellen. Wir wollen daher durch b_a die Projection der Linie b auf der Linie a, und eben so durch a_b die Projection der Linie a auf b darstellen. Wenn in einem rechtw. Tr. a, b die Catheten und c die Hypotenuse, so ist:

$$a = c_a;\ b = c_b;\ c = a_c + b_c \text{ und } a_b = b_a = o.$$

42. Lehrs. In jeder geschlossenen geradlinigen Figur ist jede Seite gleich der algebraischen Summe der Projectionen aller übrigen auf sie.

43. Lehrs. Die Projection vom ganzen Umfange einer geschlossenen Figur auf einer beliebig der Lage nach gegebenen geraden Linie ist immer gleich Null.

44. Lehrs. Die Differenz zweier Quadrate ist gleich dem Rectangel aus der Summe und Differenz der Seiten dieser Quadrate.

45. Lehrs. Das Rect. aus der Summe und der Differenz zweier Linien ist gleich der Differenz der Quadrate aus diesen Linien.

46. Lehrs. Bei jedem W. sind die Rect. aus einem Schenkel und aus der Projection des andern auf ihn einander gleich.

Lehrs. Es seien a, b die Catheten, c die Hypotenuse und d der Perpendikel auf die Hypotenuse, so sind die hier vorkommenden 3 Tr. einander gleichwinklig, und der an a anliegende Abschnitt ist die Projection von a auf c, also $= a_c$; der an b anliegende Abschnitt ist eben so b_c. Schreibt man nun die homologen Seiten von diesen drei Tr. wie folgt unter einander und verbindet je zwei nicht homologe Seiten zu Seiten eines Rect., so ergeben sich sechs Gleichungen als eben so viel Lehrsätze. Nämlich:

die Seiten sind	a,	b,	c
	a_c,	d,	a
	d,	b_c,	b

hieraus 1) $a \cdot d = b \cdot a_c$, 4) $a \cdot b_c = b \cdot d$,

2) $a \cdot a = c \cdot a_c$, 5) $a_c \cdot b_c = d \cdot d$,

3) $b \cdot a = c \cdot d$, 6) $b \cdot b = c \cdot b_c$,

Z. B. die 5te Gleichung $d^2 = a_c \cdot b_c$ giebt den bekannten Lehrsatz: in jedem rechtw. Tr. ist das Qdrt. des Prpd. gleich dem Rect. aus den beiden Abschnitten der Hypotenuse, und zwar unabhängig von dem Pythagoräischen Lehrsatz erwiesen.

Ferner die 2te Gleich. $a^2 = c \cdot a_c$

und die 6te = $b^2 = c \cdot b_c$

giebt addirt $a^2 + b^2 = c \cdot (a_c + b_c) = c^2$

den Pythagoräischen Lehrsatz.

Jede von diesen zwei addirten Gleich. giebt den Lehrs. In jedem rechtw. Tr. ist das Quadrat von einer Cathete gleich dem Rect. aus dem anliegenden Abschnitt und der Hypotenuse.

47. Lehrs. In jedem beliebigen Tr. ist das Rect. aus seiner Seite und der Projection einer andern Seite auf sie gleich dem Rect. aus der zweiten Seite und der Projection der erstern auf sie.

Symbolisch. Wenn a, b, c die 3 Seiten des Triangels, so ist:

1) $a \cdot b_a = a_b \cdot b$,

2) $a \cdot c_a = a_c \cdot c$,

3) $b \cdot c_b = b_c \cdot c$.

48. Lehrs. In jedem Tr. ist das Quadrat über der Gegenseite eines spitzen W. gleich der Summe der Quadrate über den beiden andern Seiten, weniger dem doppelten Rect. aus einer dieser Seiten und der Projection der andern auf sie.

Symbolisch. Wenn a, b, c die Seiten des Tr., so ist, wenn a einem spitzen W. gegenüber liegt,

$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c_b$ oder $= b^2 + c^2 - 2c \cdot b_c$.

49. Lehrs. In jedem stumpfwinkl. Tr. ist das Qdrt. über die Gegenseite des stumpfen W. gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, mehr dem doppelten Rect. aus einer dieser Seiten und der Projection der andern auf sie.

Symbolisch. Wenn a, b, c die 3 Seiten und c die Gegenseite des stumpfen W. ist, so hat man

$c^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot b_a$ oder $= a^2 + b^2 + 2b \cdot a_b$.

50. Lehrs. Zieht man von den Spitzen eines gleichschenkligen Tr. eine beliebige Linie (Transversale), welche

welche die Grundl. oder ihre Verlängerung schneidet, so ist das Rect. aus der Summe und Differenz eines Schenkels u. der Transversale gleich dem Rect. aus den beiden durch die Transversale auf der Grundl. gemachten Abschnitte.

51. Lehrs. Wird in einem beliebigen Tr. die Transversale von der Spitze bis zur Mitte der Grundl. gezogen, so ist die Summe der Qdrt. der beiden Seiten gleich der doppelten Summe von dem Quadrate der Transversale und dem Quadrate der halben Grundlinie.

Zusatz. Ist der Tr. gleichschenklig, so ergiebt sich der Pythagoräische Lehrsatz.

52. Lehrs. In jedem Prllgrm. ist die Summe der Qdrt. über den beiden Diag. gleich der Summe der Qdrt. über den vier Seiten.

Zusatz. Ist das Prllgrm. ein Rect., so ergiebt sich der Pythagoräische Lehrsatz.

53. Lehrs. In jeder vierseitigen Fig. ist die Summe der Qdrt. über alle vier Seiten gleich der Summe der Qdrt. über beiden Diag., mehr dem vierfachen Qdrt. über der Entfernung der Mitten beider Diagonalen. Dieser Satz gilt, wie auch immer die vier Winkelspitzen im Raum liegen mögen. Auch ist die Summe der Qdrt. der beiden Diag. gleich der doppelten Summe von den Qdrt. der zwei geraden L., welche die Mitten der Gegenseit. verbinden.

Zus. Wenn die Diag. des Vierf. sich gegenseitig halbiren, so ergiebt sich der 52. Lehrsatz.

54. Lehrs. Wenn in einem Vierseit die Summe der Qdrt. der Seiten gleich der Summe der Qdrt. der Diagonalen, so ist das Vierseit ein Parallelogramm.

55. Aufg. In welcher vierseitigen Figur ist die Summe der Qdrt. der Diagonalen ein Maximum?

56. Lehrs. Wenn die Winkelspitzen der über der Grundl. eines gleichschenkligen Tr. gezeichneten Tr. von der Spitze des gleichschenkligen um die Länge eines Schenkels entfernt sind, und mit gedachter Spitze auf einerlei Seite der Grundl. liegen, so sind die genannten W. einander gleich, und jeder ist die Hälfte des W. an der Spitze des gleichschenkligen Triangels.

Zusatz. Jeder Winkel auf der entgegengesetzten Seite der Grdl. in eben der Entfernung ist die Hälfte von dem um die Spitze des gleichschenkligen Tr. liegenden erhabenen Winkel, sie ergänzen also die erstern zu 2R.

57. Lehrs. Wenn W. auf einerlei Seite über der Grdl. eines gleichschenkligen Tr. jeder gleich der Hälfte des W. an der Spitze sind, so liegen sie alle von dieser Spitze gleich weit, und zwar um die Länge eines Schenkels des gleichschenkligen Tr., entfernt; dasselbe gilt von den Supplementw. zu jenen Winkeln.

58. Aufg. Zu drei gegebenen Punkten, die nicht in gerader Linie liegen, einen Mittelpunkt, d. h. einen Punkt zu finden, der von diesen drei gegebenen gleich weit entfernt liegt.

59. Lehrs. In zwei beliebigen gleichwinkligen Tr. sind die Rect. aus je zwei nicht homologen Seiten, die zu gleichen W. gehören, einander gleich.

Dieser Satz gilt auch umgekehrt.

60. Lehrs. Wenn zwei Seiten eines Tr. parallel mit der dritten geschnitten, so ist: 1) das Rect. aus dem obern Abschnitt der einen Seite und dem untern Abschnitt der andern Seite gleich dem Rect. aus dem obern Abschnitt der zweiten Seite, und dem untern Abschnitt der ersten Seite.

2) Auch das Rect. aus einer Seite und der Prlle. ist gleich dem Rect. aus dem obern Abschn. der genannten Seite und der Grdl. Umgekehrt: wenn jene Rect. gleich sind, so läuft die Schnittlinie mit der Grundlinie parallel.

61. Lehrs. Wenn eine gerade Linie (Transversale) den W. eines Tr. halbirt, so ist das Rect. aus einer Seite des getheilten Wink. und dem nicht anliegenden Abschn. gleich dem Rect. aus der zweiten Seite des halbirten W., und dem zweiten nicht anliegenden Abschnitt. Umgekehrt: wenn gedachte Rect. gl. sind, so halbirt die Transv. den W. an der Spitze.

62. Aufg. Aus einer Winkelspitze eines gegebenen Tr. eine Transversale zu ziehen, welche die Gegenseite so theilt, daß ein beliebiges Prllgrm. aus dieser Seite und einem durch die Transversale gemachten Abschnitt gleich dem diesem Prllgrm. gleichwinkligen Rhombus aus der dem Abschnitt anliegenden Seite werde.

63. Lehrs. Halbirt eine Transversale in einem Tr. einen W., so ist das Rect. aus den Seiten des halbirten W. gleich dem Rect. aus den Abschnitten auf der dritten Seite mehr dem Quadrat der Transversale. Wenn a und b die Linien, so ist

$$a \cdot b_a = b \cdot a_b.$$

64. Aufg. Eine gegebene Linie so zu theilen, daß das Qdrt. des größern Abschnitts gleich dem Rect. aus der ganzen Linie und dem andern Abschn. sei.

65. Aufg. Einen gleichschenkligen Tr. zu zeichnen, in welchem jeder W. an der Grdl. doppelt so groß als der Winkel an der Spitze sei.

66. Lehrs. Wenn zwei gleiche Tr. einen gleichen W. haben, so sind die Rect. aus den den gleichen W. einschließenden Seiten einander gleich. Umgekehrt: wenn zwei Tr. einen gleichen W. haben, u. die gedachten Rect. einander gleich sind, so müssen auch die Tr. einander gleich sein. — Der Satz gilt natürlich auch von Parallgrammen.

67. Aufg. Einen gegebenen Tr. in einen gleichseitigen zu verwandeln.

68. Lehrs. Das Rect. aus einer geraden Linie und der Projection einer zweiten Linie auf sie, ist gleich dem Rect. aus der zweiten Linie und der Projection der ersten auf sie.

69. Lehrsatz. In jedem geradlinigen Vielseit ist die Summe der Qdrt. über den Seiten gleich der doppelten algebraischen Summe der Rect. aus jeder dieser Seiten, und der Projection aller hinter ihr folgenden Seiten auf sie.

Wenn a, b, c . . . . . v, w, x die Seiten der Figur, so ist der Satz symbolisch ausgedruckt,

$a^2+b^2+c^2+\ldots+x^2=2[a.b_a+a.c_a+\ldots+b.c_b+\ldots+w.x_w]$.

70. Lehrs. In jedem geradlinigen Vielseit ist das Qdrt. über einer Seite gleich der Summe der Qdrt. über den übrigen Seiten weniger der doppelten Summe der Rect. aus jeder dieser Seiten und der Projection aller hinter ihr folgenden Seiten auf sie.

Symbolisch:

$a^2=b^2+c^2+\ldots+x^2-2[bc_b+b.d_b+b.e_b+\ldots+w.x_w]$.

71. Aufg. Ein gegebenes Qdrt. in einem Rhombus von gegebenen W. zu verwandeln.

72. Aufg. In einem Tr. sind gegeben: aus einer Seite, der Differ. der anliegenden W. und der Differ. der beiden andern Seiten den Tr. zu zeichnen.

73. Aufg. Aus einer Seite, die Differenz der anliegenden W. und die Summe der beiden andern Seiten den Tr. zu zeichnen.

74. Lehrs. Trapeze von gleicher Höhe, deren schiefe Seiten einander gegenseitig halbiren, sind einander gleich.

75. Lehrs. Jedes Trap. ist einem Tr. von gleicher Höhe gleich, dessen Grdl. die Summe der beiden Parallelseiten des Trap. ist.

76. Lehrs. Jedes Vierseit, dessen eine Seite zur Grdl. angenommen wird, und in welchem Prpd. aus den darüber liegenden Winkelspitzen auf die Grdl. gezogen werden, ist einer Summe von Tr. gleich, deren Spitzen jene Winkelspitzen, deren Höhen jene Prpd., und deren Grdl. die Abstände sind, von dem Endp. der Grdl. zum zweiten, von dem ersten Prpd. zum dritten, von dem zweiten Prpd. zum vierten, ꝛc.

77. Lehrs. Jedes Vielseit ist einem andern in jenes geschobenen und um eine Winkelspitze verminderten Vielseit gleich, wenn die Verbindungslinie zweier nächsten Winkelspitzen in dem einen und andern der Diag. zweier nächsten Winkelspitzen in dem ersten Vierseit parallel ist.

78. Lehrs. Den Unterschied zweier Tr., welche einerlei Scheitel, gleiche und parallele Grdl. haben,

ist dem halben Prllgrm. zwischen den prll. und gleichen Grdl. gleich.

79. Lehrs. Der Unterschied zweier Triangel, von einerlei Grdl. und verschiedener Höhe, ist einem Tr. von derselben Grdl. gleich, dessen anliegende Seiten der Verbindungslinie der Spitzen jener beiden Tr. prll. und gleich ist.

80. Lehrs. Die Flächensumme zwei Tr., von einerlei Grdl., ist einem Tr. von derselben Gdl. gleich dessen anliegende Seite die Diag. des Prllgrms. der beiden anliegenden Seiten jener Tr. ist.

81. Lehrs. Die Summe mehrerer Tr. von einerlei Grdl., ist einem Tr. von derselben Grdl. gleich, dessen anliegende Seite die Grdl. eines Vierseits ist, wovon die Seiten gegenseitig prll. und gleich den anliegenden Seiten jener Tr. sind.

82. Lehrs. Gleichwinklige Prllgrm., deren gleiche W., entweder in einander geschoben, oder als Scheitelwinkel entgegengestellt sind, sind einander gleich, wenn die Durchschnittsp. der zusammentreffenden Seiten mit jener Winkelsp. in einer geraden Linie liegen.

83. Lehrs. Gleichwinklige Prllgrm., von zusammenliegenden Grdl., sind einander gleich, wenn die L. einander prll. sind, welche die gegenseitigen Durchschnittsp. der Seiten verbinden.

84. Lehrs. Gleichwinklige Prllgrm. von gegenseitig prll. Seiten sind einander gleich, wenn die Linien einander prll. sind, welche die gegenseitigen Durchschnittsp. der Seiten verbinden.

85. Lehrs. Wenn von einem Punkte mehrere gerade Linien ausgehen, und durch beliebig geführte Prll. einen derselben in gleiche Theile getheilt wird, so werden durch dieselben Prll. auch alle übrigen vom gedachten Punkt ausgehende gerade Linien in gleiche Theile abgetheilt.

86. Lehrs. Wenn auf einer Winkelseite beliebig große, aber gleiche, Stücke in beliebiger Anzahl vom Scheitel aus genommen, und durch die Theilp. beliebig gerichtete Prll. gezogen werden, so ist unter diesen von der ersten die zweite das 2fache, die dritte das 3fache, die vierte das 4fache, u. s. w.

87. Lehrs. Wenn auf beiden Winkelseiten vom Scheitel aus, beliebig große, aber gleiche, Stücke in beliebiger Anzahl genommen werden, so sind die Verbindungslinien der gleichnamigen Theilp. einander sämmtlich parallel.

Und unter diesen ist von der ersten die zweite das 2fache, die dritte das 3fache, die vierte das 4fache, u. s. w.

88. Lehrs. Wenn auf der Grdl. eines Tr. beliebige, aber gleiche, Stücke genommen und die Theilp. mit

dem Scheitel durch gerade Linien verbunden werden, so schneiden diese auf jeder mit der Grdl. prll. L. gleiche Stücke ab.

89. Lehrs. Wenn in einem Tr. die Grdl. in gleiche Theile getheilt wird, so theilen die aus dem Scheitel an die Theilp. gezogenen geraden Linien jede der Grdl. parallele Grade in eben so viele gleiche Theile ein.

90. Lehrs. Wenn man durch die Endp. einer geraden Linie zwei beliebig, aber entgegengesetzt, gerichtete Parallelen zieht, und auf denselben von den Endp. aus gleiche Stücke in gleicher Anzahl nimmt, so sind die Verbindungslinien des ersten Theilpunkts auf der einen und letzten auf der andern, des zweiten auf der einen und vorletzten auf der andern, u. s. w., einander sämmtlich parallel, und theilen die gegebenen Grade in eine um 1 größere Anzahl gleicher Theile ab.

91. Erkl. In gleichwinkl. Tr. sollen zwei Seiten, welche den Winkeln verschiedener Paare in verschiedenen Tr. gegenüber liegen, wechselnamig (reciprok., altern) genannt werden.

92. Lehrs. Wenn auf einer geraden Linie drei P. beliebig angenommen, durch zwei derselben beliebig gerichtete Prll. gezogen, und an die gegebenen Grade zwei gleiche Tr. so angelegt werden, daß

ihre Spitzen in den Parallelen liegen, während ihre Grdl. die Abstände jener beiden P. von dem dritten sind, so liegen die beiden Spitzen mit diesem dritten P. in gerader Linie.

93. Lehrs. Wenn zwei Prllen. die Seiten eines W. schneiden, so schneiden die Verbindungslinien der wechselnamigen Durchschnittsp. einander in einem Punkt, dessen Verbindungslinien mit den Schenkeln des gegebenen W. die Prllen. halbiren.

94. Lehrs. Wenn bei zwei Tr. die geraden Linien von der Spitze des ersten zu den Endp. der Grdl. des zweiten, den geraden Linien von der Spitze des zweiten zu den Endp. der Grdl. des ersten gegenseitig parallel sind, so sind diese Tr. einander gleich.

95. Lehrs. Wenn von einem Punkt in den Schenkeln eines Winkels zwei Grade an den andern Schenkel, und von einem Punkte in diesem andern Schenkel zwei Grade an den ersten jenen gegenseitig prll. gezogen werden, so sind die Verbindungslinien der wechselnamigen Endp. einander gleichfalls parallel.

96. Lehrs. Wenn von einem P. drei gerade Linien beliebig ausgehen, und auf der ersten zwei Punkte willkührlich angenommen, von diesen P. an die zweite Grade zwei Prllen., welche sie in zwei Punkten

schneiden, gerichtet, und von diesen Punkten abermals zwei Prllen, an die dritte Grade gerichtet werden, welche sie in zwei Punkten schneiden; so sind die Verbindungslinien der gleichnamigen Durchschnittsp. auf der ersten und dritten Grade einander gleichfalls parallel.

97. Lehrs. Wenn von vier Rect. das erste dem zweiten gleich, und das dritte dem vierten gleich ist, das erste und dritte aber eine gleiche Grdl. und das zweite und vierte eine gleiche Höhe haben; so ist das Rect. aus der Höhe des ersten und der Grdl. des vierten, dem Rect. aus der Höhe des dritten und der Grdl. des zweiten gleich.

Es seien A, B, C, D die vier Rectangel,
deren Grdl. b, c, b, d,
deren Höhe a, h, H, h,
so ist, wenn $a \cdot b = c \cdot h$
und $d \cdot h = b \cdot H$
auch $a \cdot d = c \cdot H$.

98. Lehrs. Wenn aus zwei in einer Winkelseite befindlichen P. an die andere Winkelseite zwei Paar Parallelen gezogen werden, so haben die von der Winkelspitze genommenen Abstände der vier Durchschnittsp. eine solche Beziehung zu einander, daß die Rect. zwischen dem kleinsten und größten Abstande dem Rect. zwischen den beiden mittlern Abständen gleich ist.

99. Lehrs. Wenn auf einer Winkelseite zwei beliebige P. angenommen, von diesen die Prllen. an die andere Winkelseite gerichtet werden, und aus dem Ende der einen eine der Diag. prll. Linie an die erste Winkelseite gezogen wird, so haben die von der Winkelspitze genommenen Abstände der drei Durchschnittsp. eine solche Beziehung zu einander, daß das Rect. zwischen den beiden äußern dem Qdrt. des mittlern Abstandes gleich ist.

100. Lehrs. Wenn gleiche Tr. über einerlei Grdl. durch eine der Grdl. prll. Linie geschnitten werden, so sind die zwischen den Winkelseiten genommenen Abstände einander gleich.

101. Lehrs. Wenn aus einem beliebigen Punkt, an die Spitzen zweier über einer Grdl. stehenden Tr., gerade Linien; u. aus einem andern in der L. von jenem Punkt bis zu einem Endp. der Grdl. beliebig angenommenen Punkt, an die Seiten gerade Linien jenen gegenseitig parallel gezogen werden; so sind die zwischen den Triangelseiten aus jenen Durchschnittsp., der Grdl. parallel gezogenen Linien, einander gleich.

102. Aufg. Aus einem gegebenen Punkt eine lange Linie mit einem kurzen Lineale und kleinen Zirkel nach einer gegebenen Richtung zu ziehen.

103. Aufg. Aus einem gegebenen Punkt nach einem andern Punkt eine gerade Linie zu ziehen, welche länger als das Lineal ist, wenn man einen Zirkel von hinreichender Größe hat.

104. Aufg. Aus einem gegebenen Punkt nach einem andern gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, welche länger als das Lineal ist, wenn der Zirkel zu klein ist, um nach Aufg. 103. zu verfahren.

105. Aufg. Es ist ein gleichseitiger Tr. gegeben, man soll über dessen Grdl. ein reguläres Sechsseit zeichnen.

106. Aufg. Ueber die Grdl. eines Qdrts. ein reguläres Achtseit zu zeichnen.

107. Aufg. Ein reguläres Vielseit von gerader oder ungerader Seitenzahl ist gegeben, man soll über die Seite desselben ein reguläres Vielseit von doppelter Seitenzahl zeichnen.

108. Aufg. Um ein gegebenes reguläres Vielseit ein anderes reguläres Vielseit von doppelter Seitenzahl zu beschreiben.

109. Aufg. In ein gegebenes beliebiges Vierseit ein Prllgrm. zu zeichnen, dessen eine Seite von gegebener Lage und Größe sei.

110. Aufg. Es sind zwei P. und eine Linie der Lage nach gegeben, man soll in dieser Linie einen

Punkt bestimmen, in welchem zwei gerade Linien, nach jenen zwei Punkten gezogen, gleiche W. mit der gegebenen Linie bilden. Dieser Punkt ist auch derjenige, für welchen die Summe der zwei aus ihm nach den gegebenen Punkten gezogenen Linien ein Minimum ist.

111. Aufg. Innerhalb einer belieb. gebrochenen L., die nur halbe Winkel hat, sind zwei Punkte gegeben, man soll auf den einzelnen Linien, aus welchen die gebrochene bestehet, in jeder einen Punkt angeben, so daß, wenn diese Punkte unter sich und die zwei äußersten mit den zwei gegebenen Punkten verbunden werden, auf jeder Linie zwei gleiche Winkel entstehen.

Anmerk. Diese Aufg. enthält die vollst. Aufl. der Bricolirungs-Aufg. bei dem Billard.

112. Aufg. In einem ungleichseitigen Tr. an die Grdl. aus einem zu bestimmenden P. zwei Grade zu ziehen, deren Summe derjenigen der beiden Seiten gleich sei.

113. Aufg. In einem gleichschenkligen Tr., in welchem die Seiten jede kleiner als die Grdl. sind, an dieselbe aus einem zu bestimmenden Punkt zwei Grade zu ziehen, deren Summe derjenigen der beiden Seiten gleich sei.

114. Aufg. Einen Universalmaßstab zu zeichnen, durch welchen jede gegebene gerade Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile eingetheilt werden kann, wenn diese Anzahl nicht größer ist, als die Anzahl der Theile an der Seite des Maßstabes.

115. Aufg. Ein Vierf. zu zeichnen, wenn drei auf einander folgende Seiten gegeben sind, überdem die vierte auf den beiden anliegenden Seiten rechtwinklig stehet.

116. Aufg. Ein Vierseit zu zeichnen, wenn zwei Gegenseiten und 3 W. gegeben sind.

117. Aufg. Ein prll. Trap. zu zeichnen, wenn alle 4 Seiten einzeln gegeben sind.

118. Aufg. Ein Vierseit zu zeichnen, in welchem ein W., die zwei Gegenf. u. die aus dem Scheitel des gegeb. W. auslaufende Diag. gegeben sind, und überdem bekannt ist, daß die den gegebenen W. einschließenden Seiten gleich sein sollen.

119. Aufg. Ein Vierseit zu zeichnen, dessen vier Seiten, und die Linie, welche die Mitten von zwei Gegenseiten verbindet, bekannt sind.

Anmerk. Wenn das Vierseit ein Prllgrm., so ist diese Aufg. ganz unbestimmt.

120. Aufg. Ein Vierseit zu zeichnen, von welchem zwei winkelrecht auf einander stehende Seiten einzeln gegeben sind, aber von den beiden andern von wel-

chen die eine auch auf einer von den bekannten Seiten perpend. steht, ist uns nur der Unterschied bekannt.

121. Lehrs. Wenn auf den drei Seiten eines beliebigen Tr., Prllgrm. so beschrieben werden, daß die Winkelsp. in der Oberlinie des einen Prllgrm. in den Oberlinien der beiden andern liegen, so ist die Fläche des ersten gleich der Flächensumme der beiden andern.

Anmerk. Ist der Tr. rechtw., so ergiebt sich hieraus der Pythagoräische Lehrsatz.

122. Lehrs. Wenn in einem rechtw. Tr. der Perpd. von der Spitze des rechten W. auf die Hypotenuse gefällt wird, und man aus den Endp. der Hypotenuse als Mittelp. Kreisbogen beschr., welche die Abschnitte auf der Hypotenuse halbiren, so schneiden diese Bogen auf den Katheten jene halbe Abschnitte ab.

123. Aufg. Ein Odrt. zu zeichnen, wenn der Unterschied zwischen der Diag. und Seite bekannt ist.

124. Aufg. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade L. nach zwei der Lage nach gegebenen Prll. zu ziehen, daß der zwischen diesen Prllen. enthaltene Theil eine gegebene Länge habe.

Diese Aufg. ist augenscheinlich unmöglich, wenn die gegebene Länge kleiner als der Abstand zwischen den Prllen. ist.

125. Aufg. Es sind zwei Prllen. der Lage nach u. ein Punkt außerhalb in der Ebene dieser Prllen. gegeben, man soll, von diesem Punkt aus, eine gerade Linie so ziehen, daß die Differenz ihrer Abschnitte eine gegebene Länge habe.

126. Aufg. Zwischen zwei der Lage nach gegebenen Linien sind zwei Punkte A, B gegeben, man soll auf jenen zwei Linien Punkte C, D, E, F .... in gegebener Anzahl so bestimmen, daß die Linien AC, CD, DE, EF, FB, mit der Linie, auf welcher sie sich schneiden, gleiche W. machen.

127. Aufg. In einem gegeb. Tr. soll mit der Grdl. eine Prlle. so gezogen werden, daß die Summe oder der Unterschied der an der Grdl. anliegenden Abschnitte gleich der Prlle. sei.

128. Aufg. Durch einen innerhalb eines bekannten hohlen Winkels gegebenen Punkt eine gerade Linie zwischen den Schenkeln zu ziehen, welche in diesem Punkt halbirt wird.

129. Aufg. Es sei alles wie in der vorherg. Aufg., nur soll der Punkt die Linie so theilen, daß der eine Abschnitt 3 gleiche u. der andere 5 solche gl. Theile enthält.

130. Aufg. In einem gegebenen rechtwinkligen Tr. ein Quadrat einzuschreiben, und von einem gegebe-

nen Quadrat die Winkelspitzen so abschneiden, daß ein reguläres Achtseit entstehet.

Lehrsätze und Aufgaben zu dem zweiten Abschnitt.

131. Lehrs. Jede gerade Linie, welche die Kreisfläche oder seine Peripherie halbirt, ist ein Durchmesser.

132. Lehrs. Wenn zwei gerade Linien auf der Peripherie zwei gleiche Bogen einschließen, so sind sie parallel.

133. Lehrs. Wenn die Gegenwinkel eines Vielseits zusammen 2R betragen, so läßt sich um dieses Vielseit ein Kreis beschreiben.

134. Lehrs. In jedem umschriebenen Vierseit ist die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden andern Gegenseiten. Der umgekehrte Satz ist auch wahr.

Wenn also von einem solchen Vierseit 3 Seiten bekannt sind, so ist auch die 4te gegeben.

135. Lehrs. Wenn man aus einem in der Ebene des Kreises gegebenen Punkt gerade Linien zur Pe-

ripherie zieht, 1) so gehet die größte durch den Mittelpunkt, 2) die kleinste ist die, deren Verlängerung durch den Mittelp. gehet, 3) diese gerade Linien verkleinern sich, indem sie von der größten zur kleinsten gehen.

136. Aufg. Durch einen innerhalb der Kreisfläche gegebenen Punkt die kleinste Sehne zu ziehen.

137. Lehrs. In einem jeden umschriebenen Polygon von einer geraden Anzahl Seiten ist die Summe der geraden Seiten gleich der Summe der ungeraden Seiten; und in jedem umschriebenen Polygon von gerader Seitenzahl, ist die Summe der geraden Winkel gleich der Summe der ungeraden Winkel.

138. Lehrs. Ein W., von welchem ein Schenkel eine Kreissehne ist, und die Hälfte des von ihr umspannten Bogens zum Maße hat, dessen anderer Schenkel ist eine Tangente.

139. Lehrs. Die zwei Theile von einer Secante, zwischen zwei concentrischen Kr., sind einander gleich.

140. Lehrs. Läßt man einen um einen Kreis beschriebenen Tr. sich um die Peripherie herumbewegen, so, daß die Seiten den Kreis immer berühren, so beschreiben die drei Winkelspitzen Kreise, die den drei ersten concentrisch sind.

141. Lehrs. Fället man aus dem Endpunkt eines Durchm. zwei Perpend. auf einer Secante, die ihn nicht schneiden, so sind die daraus entstehenden äußern Abschnitte einander gleich.

142. Lehrs. Der zwischen zwei in dem Endp. eines Durchm. errichteten Perpd. enthaltene Theil von einer Tangente ist gleich der Summe der zwei Abschnitte, welche sie auf diese Perpd. bestimmt.

143. Lehrs. Die Theile der Halbm., welche zwischen einem Bogen, der kleiner als der Halbkr. ist und seiner Sehne liegen, sind alle kleiner als die halbe Sehne.

144. Lehrs. Errichtet man in dem Mittelpunkt u. auf der Seite eines Kreisausschnitts einen Perpd. gleich der Sehne des Ausschnitts, so wird ein aus dem Endp. dieses Prpd. mit dem Halbm. des Kr. beschriebener Kreisbogen den Bogen des Abschnitts halbiren.

145. Lehrs. Die Durchschnittsp. der Perpd. in den Winkelspitzen eines Tr. auf den Halbirungslinien der W. geben die Mittelp. der drei äußern Kreise, welche die drei verlängerten Seiten des Tr. berühren. Der Satz ist auch umgekehrt wahr.

146. Lehrs. Wenn 4 Kr. jeder drei Seiten irgend eines Vierseits außerhalb oder innerhalb berühren, so liegen

die Mittelpunkte dieser Kreise immer in einerlei Kreisperipherie.

147. Lehrs. Wenn man den Mittelpunkt von einem gleichseitigen Tr. beschriebener Kr. mit den Winkelspitzen des Tr. verbindet, und man in den 4 entstehenden Tr. drei Kreise einschr., so berühren sich diese drei Kreise und auch den ersten Kr.

148. Lehrs. Wenn man durch die Endp. der prllen. Seiten eines Trap. und durch den Durchschnittsp. der Diag. oder der beiden andern Seiten Kreise legt, so berühren sich diese Kreise entweder in dem Durchschnittsp. der Tangenten, oder im Durchschnittsp. der nicht prllen. Seiten.

149. Lehrs. Umgekehrt, wenn zwei Kreise sich außerhalb oder innerhalb schneiden, und man zieht durch den Berührungspunkt zwei Secanten, so sind die Sehnen, welche die Durchschnittsp. verbinden, einander parallel.

150. Aufg. Einen Tr. zu zeichnen, wenn man vier Seiten, einen anliegenden W., und den Halbm. des umschriebenen Kreises kennt.

151. Aufg. Einen Tr. zu zeichnen, wenn die Grdl. der Gegenwinkel und die Höhe oder der Inhalt gegeben sind.

152. Aufg. Einen Tr. zu zeichnen, wenn die Grundlinie, die Summe der beiden andern Seiten, und

der Perpd. von einem Endp. der Grdl. auf eine Gegenseite gegeben sind.

153. Aufg. Gegeben die Grdl., die Höhe oder der Inhalt und der W., welcher der Grdl. gegenüber liegt, den T. zu zeichnen.

154. Aufg. Jedes Vielseit in ein Rect. von gegebener Diag. oder in einen rechtw. Tr. von gegebener Hypotenuse zu verwandeln.

155. Aufg. Aus den beiden Diag. und einem W. das Prllgrm. zu zeichnen; oder einen Tr. zu constr., wenn die Grdl. der Gegenwinkel und die Entfernung der Mitte der Grundl. von der Spitze gegeben sind.

156. Aufg. Aus einer Seite, einer Diag. und dem Gegenwinkel der gegebenen Seite, welchen die zweite Diag. mit der zweiten Seite des Prllgrms. macht, zu zeichnen. Oder von einem Tr. sind gegeben: die Grdl., der Gegenwinkel und die Entfernung des einen Endp. der Grundl. von der Mitte der Gegenseite.

157. Aufg. Ein Prllgrm. zu zeichnen, wenn gegeben sind eine Seite, der anliegende W., welche die eine Diag. mit ihr macht, und der Gegenwinkel, welche die zweite Diag. mit der zweiten Seite bildet.

158. Aufg. Ein Prllgrm. zu zeichnen, wenn gegeben sind, eine Seite und die beiden Gegenwinkel,

welche die Diagonalen mit den beiden andern Seiten bilden.

159. Aufg. Ein Prllgrm. zu zeichnen, wenn gegeben sind eine Diag., der Gegenwinkel, und ein W., welchen die andere Diag. mit einer Seite bildet.

160. Aufg. Ein Prllgrm. zu zeichnen, wenn gegeben sind eine Diag. und zwei W., welche die andere Diag. mit den Seiten bildet.

161. Aufg. Ein Prllgrm. zu zeichnen, wenn gegeben sind eine Diag., ein anliegender W. und ein Gegenwinkel, der die andere Diag. mit der Gegenseite des gegebenen anliegenden W. bildet.

162. Aufg. In einem gegebenen Kreise ein Rect. von gegebenem Inhalte einzuschreiben.

163. Aufg. An einem in einem Kreisbg. gegebenen P. eine Tangente zu ziehen, ohne den Mittelpunkt zu gebrauchen.

164. Aufg. Aus einem in der Kreisperipherie gegebenen Punkt eine Sehne in gegebener Entfernung vom Mittelp. zu ziehen.

165. Aufg. Durch einen innerhalb oder außerhalb in der Ebene der Kreisfläche gegebenen Punkt eine gerade Linie ziehen, so, daß die Sehne von gegebener Größe sei.

166. Aufg. In dem Endpunkt einer Sehne sind unbestimmte Perpend. errichtet, man soll zwischen

diesen Perpendikel eine Tangente von gegebener Länge ziehen.

167. Aufg. An einem gegebenen Kr. eine Tangente so zu ziehen, daß ihr Endp. in der Verlängerung eines der Lage nach gegebenen Durchm. liegt.

168. Aufg. Es sind zwei concentrische Kreise und ein Punkt innerhalb des kleinern gegeben, man soll durch diesen Punkt eine Linie ziehen, die in diesem Punkt halbirt wird, und deren Endp. wechselseitig in der Peripherie beider concentrischen Kreise liegen.

Liegt der gegebene Punkt zwischen den concentrischen Kreisen, so muß sein Abstand von der Peripherie des kleinern Kreises kleiner als der Abstand von der größern Peripherie sein. Wären diese Abstände gleich, so ist die durch den gegebenen Punkt gleich der Differenz der Halbm. beider concentrischen Kreise.

169. Aufg. In einem Kreise ist eine Sehne gegeben, man soll einen Durchm. so ziehen, daß die Perpd. aus den Endp. der Sehne ein gegebenes Stück abschneiden.

170. Aufg. Durch den Durchschnittsp. zweier sich schneidenden Kreise eine gerade Linie von gegebener Länge zu ziehen, und deren Endp. in beiden Peripherien liegen.

171. Aufg. Durch den Durchschnittsp. zweier sich schneidenden Kreise eine gerade Linie zu ziehen, deren Endp. in beiden Peripherien liegen und die im gedachten Durchschnittsp. halbirt ist.

172. Aufg. Durch den Durchschnittsp. zweier Kr. eine gerade Linie so zu ziehen, daß die von ihr gebildeten Sehnen zu gleichen Mittelpunktswinkeln gehören.

173. Aufg. Einen Kreis zu zeichnen, der eine der Lage nach gegebene gerade Linie in einem gegebenen Punkt berührt, und durch einen zweiten gegebenen Punkt geht.

174. Aufg. Einen Kreis zu zeichnen, der einen der Lage und Größe nach gegebenen Kreis in einem Punkt berührt, und durch einen zweiten gegebenen Punkt gehet.

175. Aufg. Einen Kreis zu zeichnen, der einen der Lage und Größe nach gegebenen Kreis und zugleich eine der Größe und Lage nach gegebene Linie in einem gegebenen Punkt berührt.

176. Aufg. Einen Kreis zu zeichnen, der einen der Lage und Größe nach gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkt, und zugleich eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt.

177. Aufg. Zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels einen Kreis zu beschreiben, der beide

Schenkel berührt und den einen in einem gegebenen Punkt.

178. Aufg. Es ist ein Kreis der Lage und Größe nach gegeben, ferner die Lage einer durch den Mittelpunkt gehenden geraden L. Man soll einen Kr. zeichnen, der von dieser Linie ein gegebenes Stück abschneidet und zugleich den gegebenen Kr. berührt.

179. Aufg. Einen Kreis zu zeichnen, der zwei der Lage und Größe nach gegebene Kreise und überdieß den einen in einem gegebenen Punkt berührt.

180. Aufg. Durch zwei gegebene Punkte zwei gerade Linien zu ziehen, die einen gegebenen W. bilden, dessen Scheitel in einer der Lage nach gegebenen Linie liegen soll.

Diese Aufg. kann unmöglich werden.

181. Aufg. Es sind drei Punkte A, B, C der Lage nach gegeben, man sucht einen vierten Punkt D, aus welchem man jene Punkte unter die gegebenen W. α, β sieht.

182. Aufg. In einem gegebenen Viertelkreise einen Berührungskreis einzuschreiben.

183. Aufg. In einem gleichseitigen Tr. drei gleiche sich gegenseitig berührende Kreise einzuschreiben, von welchen jeder eine Seite des Tr. berührt.

184. Aufg. In einem Kreise drei gleiche Kreise zu beschr., die sich gegenseitig in dem gegebenen Kreise berühren.

185. Aufg. In einem gleichseitigen Tr. drei gleiche Kreise einzuschreib., die sich einander berühren und zugleich jeder zwei Seiten des Tr. berühren.

186. Aufg. Zu zwei der Lage und Größe nach gegebenen Kreisen die möglichen gemeinschaftlichen Tangenten zu ziehen.

187. Aufg. Es sind zwei Kreise der Lage u. Größe nach gegeben, man verlangt, diese Kreise durch eine gerade Linie so zu schneiden, daß die entstehenden Sehnen von gegebener Größe sind.

Diese Aufg. kann unmöglich werden.

188. Aufg. An einen gegebenen Kreis eine Tangente zu ziehen, die mit einer der Lage nach gegebenen Linie einen bekannten W. macht.

189. Aufg. Mit einem gegebenen Halbm. einen Kr. zu beschreiben, der die Schenkel eines gegebenen W. berührt.

190. Aufg. Mit einem gegebenen Halbm. einen Kr. zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt gehet, und eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt.

191. Aufg. Mit einem gegebenen Halbm. einen Kr. zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt

gehet, und einen der Größe und Lage nach gegebenen Kr. in einem gegebenen Punkt berührt.

192. Aufg. Einen Kreis zu beschreiben, in welchen zwei gegebene Sehnen Bogen abschneiden, von welchen der eine doppelt so groß als der andere ist.

193. Aufg. Aus drei gegebenen Punkten A, B, C, eines Kreisbogens, ohne den Mittelp. zu kennen, eine beliebige Menge anderer P. D, E, F, G, des Umfangs zu bestimmen, welche entweder lauter gl. Abstände haben

(AB = CD = DE = EF = FG),

oder welche wechselsweise gleiche Abstände haben

(AB = CD = EF; BC = DE = FG).

194. Aufg. An einem gegebenen Kreise zwei Berührungslinien zu ziehen, die einen bekannten Winkel einschließen.

195. Aufg. Die Mittelp. und die Halbm. der beiden Kreise zu bestimmen, deren Umfang zwei der Lage nach gegebene gerade Linien berührt, und durch einen gegebenen P. geht.

196. Aufg. Man soll die vier Kreise zeichnen, deren Umfang die Seiten eines gegebenen W. und den Umfang eines innerhalb des W. der Größe u. Lage nach gegebenen Kreises berührt.

197. Aufg. Es sind zwei gerade Linien der Lage nach und die erste auch der Größe nach gegeben,

man soll auf der andern zwei Punkte angeben, in welchen die erste unter gegebenen gleichen Winkeln gesehen wird.

198. Lehrs. Wenn aus zwei Punkten der Kreisperipherie, deren Abstand den Quadranten gleich ist, Prpd. auf den Durchmesser gefällt werden, so ist jeder Perpendikel dem Abstand der andern vom Mittelpunkt gleich, und die Summe ihrer Qdrt. ist dem Qdrt. des Halbm. gleich.

199. Lehrs. Wenn an der Kreisperipherie eine Berührungslinie gezogen, und selbige durch zwei auf dem Durchmesser in seinem Endp. errichtete Perpendikel geschnitten wird, so finden folgende Relationen Statt:

1) die Abschnitte der berührenden sind den anliegenden Prpd. gleich;
2) die aus dem Mittelp. an die Enden der berührenden gezogenen Linien bilden am Mittelp. einen rechten W., und sind den aus dem Berührungsp. an die Enden des Durchm. gezogenen Linien gegenseitig parallel;
3) der aus dem Berührungsp. auf den Durchm. gefällte Perpd. wird von den Diagonalen des um den Halbkreis entstandenen Trapez in einerlei Punkt halbirt;
4) das Rect. aus den beiden Abschnitten der Berüh-

renden ist dem Odrt. des Halbm. gleich, mithin von unveränderlicher Größe, welche Lage auch die Berührende haben mag. Verlängert man die Berührende u. den Durchm., die beide sich schneiden, so ist

5) das Rect. aus den Abschnitten zwischen dem Treffpunkt u. dem Endp. der Berührende gleich dem Odrt. aus der Entfern. des Trffp. vom Mittelp.

200. Lehrs. Wenn auf einer durch den Mittelp. gehenden Grade zwei vom Mittelp. gl. entfernte P. genommen werden, so ist die Summe der Odrt. ihrer Abstände von jedem P. der Prph. von unveränderlicher Größe.

201. Lehrs. Wenn zwei Prllsehnen. gezogen werden, so sind die beiden schiefen Sehnen und die beiden Diagonalsehnen einander gleich.

202. Lehrs. Wenn in einem Kreisvierf. eine Diag.-Sehne durch die andere Diag.-Sehne halbirt wird, so sind die beiden Rect. je zweier der halbirten Diag.-Sehnen anliegenden Sehnen einander gleich.

Uebungsaufgaben und Lehrsätze

zum dritten Abschnitt.

A. Zu dem ersten Kapitel.

203. Lehrs. Zwei Figuren sind ähnlich in allen analogen Fällen, in welchen sie congruent sind, d. h. daß, wenn man in den zur Congruenz nöthigen gleichen Stücken die gleichen W. gleich läßt, und die gleichen Linien proportional nimmt, alsdann die zwei neuen Figuren ähnlich sind. Dieser allgemeine Lehrs. enthält die folgenden Sätze.

204. Lehrs. Zwei rechtw. Tr. sind ähnlich, wenn zwei homologe Seiten proportional sind.

205. Lehrs. Zwei Trapeze sind ähnlich, 1) wenn alle homologen Seiten proportionirt sind; 2) wenn drei homologe Seiten proportionirt und ein Winkel gleich sind.

206. Lehrs. Zwei nseiten sind ähnlich, 1) wenn die homologen Seiten proportionirt und $n-3$ homologe W. gleich sind; 2) wenn $n-1$ homologe W. gleich und $n-2$ homologe Seiten proportionirt

sind; 3) wenn n — 1 homologe Seiten proportionirt und n — 2 homologe W. gleich sind.

207. Lehrs. In jedem Tr. ist der Abstand einer Winkelspitze von dem Druchmesser der drei Höhen des Tr. gleich dem doppelten Abstand zwischen der Gegenseite dieses W. und dem Mittelp. des umschriebenen Kreises.

208. Lehrs. In jedem Tr. liegen der Mittelp. des umschriebenen Kreises, der Durchschnittsp. der drei Höhen und der Durchschnittsp. der drei Linien, von den Winkelspitzen bis zur Mitte der Gegenseiten, in einer geraden Linie.

209. Lehrs. Wenn die Höhe eines Tr. die Grdl. so in zwei Abschnitte theilt, daß das Qdrt. dieser Grdl. sich zum Qdrt. einer Seite verhält, wie dieselbe Grdl. zu dem dieser Seite anliegenden Abschnitt, so ist der Tr. rechtwinklig.

210. Lehrs. Theilt die Höhe eines nicht gleichschenkligen Tr. ihn in zwei unter sich ähnliche Tr., so ist der Tr. rechtwinklig.

211. Lehrs. Ist die Höhe eines Tr. die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten, die sie auf der Grdl. bildet, so ist der Tr. rechtwinklig.

212. Lehrs. Theilt die Höhe eines Tr. die Grdl. so in zwei Abschnitte, daß eine Seite die mittlere Proportionale zwischen dieser Grdl. und dem dieser Seite anliegenden Abschnitt ist, so ist der Tr. rechtwinklig.

213. Lehrs. Es seien a, b, c die Seiten eines Tr., u. a', b', c' die eines andern Tr.

1) Wenn die den Seiten c, c' gegenüber liegenden W. C, C' gleich sind, so ist

$$ab : a'b' = a^2 + b^2 - c^2 : a'^2 + b'^2 - c'^2;$$

2) Wenn C stumpf u. C' spitz, aber $C + C' = 2R$, so kommt

$$ab : a'b' = c^2 - a^2 - b^2 : a'^2 + b'^2 - c'^2.$$

214. Lehrs. Zwei gleichschenklige Tr. sind ähnlich, wenn sie einen gleichen W. haben.

215. Lehrs. Zwei rechtw. Tr. sind ähnlich, wenn ihre Hypotenusen sich wie die Ppd. von der Spitze des rechten W. auf der Hypotenuse verhalten.

216. Lehrs. Zwei Tr. sind ähnlich, wenn ihre Umfänge sich wie ihre Grdl. verh., und sie einen gleichen W. haben.

Anmerk. Es werden zwei Fälle zu unterscheiden sein.

217. Lehrs. Zwei Tr. sind ähnlich, wenn sie bei einem gleichen W. zwei proport. Höhen haben.

218. Lehrs. Zwei Tr. sind ähnlich, wenn bei einem gleichen W. ihre Höhen sich wie ihre Grdl. verhalten.
Anmerk. Es werden zwei Fälle zu unterscheiden sein.

219. Lehrs. Wenn man aus der Spitze eines Tr. eine Transversale nach der Grdl. zieht, und diese Transversale die Grdl. und eine andere zwischen den Seiten des W. enthaltene Linie in proport. Theile theilt, so wird diese letztere Linie der Grdl. parallel laufen.

220. Lehrs. Wenn man aus einem innerhalb eines Tr. liegenden Punkt Prd. auf die Seiten fällt, und man die sechs Abschnitte auf diesen Seiten in der Richtung des Umfangs zählt, so ist die Summe der Odrte. der ungeraden Abschnitte gleich der Summe der Odrte. der geraden Abschnitte.

221. Lehrs. Wenn zwei Vierseite respective gleiche und gegen einander gleich geneigte Diag. haben, so sind sie gleich groß, wie auch immer die Diag. sich schneiden mögen.

222. Lehrs. Wenn die über der größten Seite eines Tr. gezeichnete Fig., gleich der Summe der ähnl. über den beiden andern Seiten, die der ersten homolog, gleich sind, so ist der Tr. rechtwinklig.

223. Lehrs. Wenn man aus den zwei Punkten, welche eine Diag. des Prllgrms. in drei gleiche Theile

theilen, zwei gerade Linien nach der Spitze eines Gegenwinkels zieht, so entstehet ein Tr., in welchem die drei geraden aus den Spitzen zur Mitte der Gegenseiten gezogenen Linien, respective die Hälften von den Seiten eines der Tr. sind, in welchen die andere Diag. das Prllgrm. theilt.

224. Lehrs. Wenn in zwei ähnlichen Vielseiten, zwei Grade zwei homologe Seiten in proport. Theile theilen, so verh. sich diese Graden wie zwei beliebige homol. Seiten, und sind zwei grade homologe Seiten von diesen Vielseiten.

225. Lehrs. Die aus der Spitze eines Tr. zur Winkelsp. des über der Grdl. gezeichneten Qdrts. gezogenen Linien schneiden auf der Grdl. die Seite des in dem gegebenen Tr. eingeschr. Qdrt. ab.

226. Lehrs. Wenn man in zwei ähnl. Vielseiten aus zwei homologen Scheiteln zwei Grade den zwei homologen anliegenden Seiten proportional zieht, u. sie mit diesen gleiche W. bilden, so sind die Endp. dieser Graden zwei homologe Punkte; d. h. daß die in diesen zwei Punkten und in den homologen Scheiteln der beiden Vielseite sich endigenden Graden proportional sind.

227. Lehrs. Wenn man, von der Winkelsp. aus, auf die zwei anliegenden Seiten eines Prllgrms. zwei Abschnitte diesen Seiten proport. nimmt, u. durch diese

so bestimmten Punkte zwei Prllen. zu diesen Seiten zieht, so schneiden sich diese Prllen. auf einer Diag. und theilen das gegebene Prllgrm. in vier andere, von welchen zwei, wodurch jene Diag. geht, dem Prllgrm. ähnlich sind.

228. Erkl. Drei gerade Linien sind in harmonischer stettiger Proportion, wenn das Qdrt., dessen Grdl. die größere, dessen Höhe der Unterschied zwischen der kleinern u. mittlern ist, gleich ist dem Rect., dessen Grdl. die kleinere, dessen Höhe der Unterschied zwischen der mittlern und größern ist; oder wenn sich die kleinere zur größern verh., wie der Unterschied zwischen der kleinern und mittlern zum Unterschiede zwischen der mittlern u. größern, d. h. sind a, b, c die drei Linien, u. $a < b < c$, so bilden sie eine harmonische stettige Proportion, wenn

$$c\,(b-a) = a\,(c-b) \text{ oder wenn}$$
$$a : c = b-a : c-b.$$

Die 5 Zahlen: 3, 4, 6, 9, 12 sind die kleinsten unter denjenigen, welche die Eigenschaft haben, daß je drei eine der drei bekannten stettigen Proportionen bilden. So geben

3, 4, 6 die harmonische,
3, 6, 9 und auch 6, 9, 12 die arithmetische,
3, 6, 12 und 4, 6, 9 die geometrische.

Vier Größen A, B, C, D sind in harmonischer Proportion, wenn der Unterschied der beiden ersten zum Unterschiede der beiden letzten sich verhält, wie die erste zur letzten, nämlich

$$A - B : C - D = A : D.$$

Eine gerade Linie ist stettig harmonisch getheilt, wenn sie so in drei Abschnitte getheilt ist, daß die ganze sich zu dem einen der äußern Abschnitte verhält, wie der andere äußere Abschnitt zu dem mittlern.

Anmerk. 1. Für die Geometrie sind geom. u. harmonische stettige Proportionen besonders wichtig; jene zur Verwandlung aller Fig. in gleiche Odrte.; diese zur Erforschung der Eigenschaften solcher Figuren, welche aus dem Durchschnitt mehrerer geraden Linien mit einander oder mit Kreisen entstehen.

Anmerk. 2. Diese Benennung, harmonische Proportion, ist aus der Theorie der Töne entlehnt. Die Zahlenwerthe nämlich der Töne aus dem harten Accorde C, F, G, c geben stettige harm. Prop., als C, G, c und wieder C, E, G. In der Theorie der Töne wird gezeigt, daß sich die Werthe dieser Töne verh., wie die Längen der sie umgebenden Seiten, bei übrigens gleichen Umständen, z. B. der Spannung, und zwar wie 1, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$. Schafft man die Nenner weg, so erhält man die Zahlen 30, 24, 20, 15. Hier sind nun 30, 20, 15, und wieder 30, 24, 20 harm. proportionirt. Denn es ist $30 : 15 = 30 - 20 : 20 - 15 = 10 : 5$; und $30 : 20 = 30 - 24 : 24 - 20 = 6 : 4$.

229. Aufg. Zu zwei gegebenen geraden Linien, die dritte harmonische Proportionale zu finden.

230. Aufg. Zwischen zwei gegebenen geraden Linien die mittlere harmonische Proportionale zu finden.

231. Aufg. Eine gegebene gr. Linie in stettiger harmonischer Proportion zu theilen.

232. Aufg. Innerhalb oder außerhalb eines W. ist ein Punkt gegeben, durch welchen eine Grade so gezogen werden soll, daß ihre nach den Winkelseiten genommenen Abschnitte sich wie zwei gegebene gerade Linien verhalten.

233. Aufg. Eine Fig. zu entwerfen, von welcher eine Seite, oder eine Diag., oder der Umfang gegeben ist, und welche einer andern gegebenen Figur ähnlich sei.

234. Aufg. Um einen gegebenen Punkt einen Tr. von gegebenen W. so zu zeichnen, daß die Abstände des Punkts von den Seiten gegebenen Linien gleich seien.

235. Aufg. Einen Tr. aus den gegebenen drei Höhen zu zeichnen.

236. Aufg. In einem Tr. über die Grdl. ein Odrt. oder ein einem gegebenen ähnl. Prllgrm. zu zeichnen.

237. Aufg. In einem Tr. über die Grdl. ein einem unregelmäßigen ähnl. Vierseit zu zeichnen.

238. Aufg. In einem Tr. einen andern zu zeichnen, welcher einem gegebenen ähnl. u. auf ähnl. Weise gestellt sei.

239. Aufg. Ueber einer gegebenen Grdl. einen Tr. zu zeichnen, in welchem von den anliegenden W. der eine das Doppelte des andern sei, und die Seiten sich wie gegebene Linien verhalten.

240. Aufg. Von vier Rect. sind die Grdl. gegeben; man soll ihre unbekannten Höhen, die gemeinschaftliche des 1sten und 3ten, die gemeinschaftliche des 2ten und 4ten, aus der Bedingung finden, daß die Flächensumme des ersten und 2ten einem gegebenen Rect., und daß die Flächensumme des 3ten u. 4ten einem andern gegebenen Rect. gleich seien.

241. Erkl. und Relationen. In einem Tr. heißt derjenige Punkt der Punkt der mittlern Entfernung (in der Statik der Schwerpunkt), welcher der gemeinschaftliche Durchschnitt der aus den Winkelsp. nach der Mitte der Gegenseiten gezogenen Graden ist. Für denselben finden folgende Relationen der Durchschnittslinien Statt.

Der Tr. sei ABC und A′, B′, C′ die Mitten der Gegenseiten von A, B, C, der Punkt der mittlern Entfernung werde künftig immer mit P bezeichnet.

I. 1) $\mathfrak{P}A' = \frac{1}{2}\mathfrak{P}A = \frac{1}{3}AA'$; $\mathfrak{P}B' = \frac{1}{2}\mathfrak{P}B = \frac{1}{3}BB'$; $\mathfrak{P}C' = \frac{1}{2}\mathfrak{P}C = \frac{1}{3}CC'$.

2) $\mathfrak{P}A = \frac{2}{3}AA' = 2\mathfrak{P}A'$; $\mathfrak{P}B = \frac{2}{3}BB' = 2\mathfrak{P}B'$; $\mathfrak{P}C = \frac{2}{3}CC' = 2\mathfrak{P}C'$.

3) $A'A^2 + B'B^2 + C'C^2 = \frac{3}{4}(AB^2 + AC^2 + BC^2)$.

4) $\mathfrak{P}A^2 + \mathfrak{P}B^2 + \mathfrak{P}C^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + AC^2 + BC^2)$.

5) $\mathfrak{P}A'^2 + \mathfrak{P}B'^2 + \mathfrak{P}C'^2 = \frac{1}{12}(AB^2 + AC^2 + BC^2)$.

II. Es sei $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ eine beliebige durch den Punkt $\mathfrak{P}$ gezogene Grade, u. AA'', BB'', CC'' seine beliebig an dieselbe gerichtete Parallelen.

6) $AA'' = BB'' + CC''$.

7) $\mathfrak{P}A'' + \mathfrak{P}C'' = \mathfrak{P}B''$.

Es sei $\mathfrak{M}'\mathfrak{N}'$ eine beliebig, aber nicht durch den Punkt $\mathfrak{P}$ gezogene Grade, A ein beliebig auf derselben angenommener Punkt, und AA''', BB''', CC''', $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ beliebig an dieselbe gerichtete Parallelen.

8) $3\,\mathfrak{P}\mathfrak{P}' = AA''' + BB''' + CC'''$.

9) $3\,A\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}A''' + \mathfrak{P}B''' + \mathfrak{P}C'''$.

III. Es sei $\mathfrak{B}$ ein beliebiger Punkt, u. aus $\mathfrak{P}$ werde mit $\mathfrak{P}\mathfrak{B}$ ein Kreis beschrieben. Für alle Punkte dieses Kreises ist:

10) $\mathfrak{B}A^2 + \mathfrak{B}B^2 + \mathfrak{B}C^2$
$= 3\,\mathfrak{P}\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{P}A^2 + \mathfrak{P}B^2 + \mathfrak{P}C^2$
$= 3\,\mathfrak{P}\mathfrak{B}^2 + \frac{1}{3}(AB^2 + AC^2 + BC^2)$.

11) Zieht man durch P Prlln. mit den Seiten des Tr., so schneidet man drei gleiche kleinste Tr. in den Winkeln ab, wovon jeder $\frac{4}{9} \triangle ABC$ ist.

12) Zieht man PA, PB, PC, so wird der Tr. ABC in drei gleiche Tr. zerlegt.

242. Erkl. u. Relationen. In einem Prllgrm. ist der gemeinschaftliche Durchschnitts- u. Halbirungspunkt der Diag. der Punkt P. (241.) Für denselben finden folgende Relationen der Durchschnittslinien Statt:

(Außer den schon bekannten Eigenschaften.)

I. 1) $4\,(PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2)$
$= AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2$.

II. Es sei MN eine beliebig durch P gezogene Grade, u. AA′, BB′, CC′, DD′ seine beliebig an dieselbe gerichteten Parallelen.

2) $AA' + BB' = CC' + DD'$.

3) $PA' + PD' = PB' + PC'$.

Es sei M′N′ eine beliebige nicht durch P gezogene Grade, A ein beliebig auf derselben angenommener Punkt, u. AA″, BB″, CC″, DD″, PP′ beliebig an dieselbe gerichtete Parallelen.

4) $4\,PP' = AA'' + BB'' + CC'' + DD''$.

5) $4\,AP' = AA'' + AB'' + AC'' + AD''$.

III. Es sei B ein beliebiger Punkt, aus P mit PB werde ein Kreis beschrieben, so ist für alle Punkte dieses Kreises:

6) $BA^2 + BB^2 + BC^2 + BD^2$
$4\,PB^2 + PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$
$= 4PB^2 + \frac{1}{4}(AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2.$

243. Erkl. u. Relationen. Wenn in einem beliebigen Vierseit die Seiten u. Diag. halbirt werden, so halbiren einander die Verbindungslin. der Halbirungsp. je zweier Gegenseiten u. Diag. in einem Punkt P. Für denselben finden folgende Relationen Statt;

I. Es sei ABCD das Vierseit, der Mittelp. dieser Seiten u. der Diag. seien A', B', C', D', E, F.

1) $A'B'C'D'$, $B'FD'E$, sind Prllgrme.

2) $A'B'C'D' = \frac{1}{2}ABCD = \frac{1}{2}\triangle BGC - \frac{1}{2}\triangle AGD$ (wenn G d. Durchschn. von BA, CD ist).
$BFD'E = \frac{1}{2}\triangle BHC - \frac{1}{2}\triangle AHD$ (Wenn H d. Durchschn. d. Diag. ist).
$A'FC'E = \frac{1}{2}\triangle CHD - \frac{1}{2}\triangle AHB$

3) $AB^2 + CD^2 = 2\,(D'B'^2 + FE^2)$;
$AD^2 + BC^2 = 2\,(A'C'^2 + FE^2)$;
$AC^2 + BD^2 = 2\,(A'C'^2 + B'D'^2)$.

4) $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2 = AC^2+BD^2+4EF^2$.
$AB^2+BD^2+CD^2+AC^2 = AD^2+BC^2+4B'D'^2$.
$AD^2+BD^2+BC^2+AC^2 = AB^2+CD^2+4A'C'^2$.

5) $AB^2 + BD^2 + CD^2 + AD^2 + BD^2 + AC^2 = 4\,(EF^2 + B'D'^2 + A'C'^2)$.

6) $\mathfrak{P}A^2 + \mathfrak{P}B^2 + \mathfrak{P}C^2 + \mathfrak{P}D^2 = EF^2 + B'D'^2 + A'C'^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 + BD^2 + AC^2)$.

II. Es sei $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ eine beliebige durch $\mathfrak{P}$ gezogene Grade, u. AA'', BB'', CC'', DD'' seien beliebige an dieselbe gerichtete Parallelen.

7) $AA'' + DD'' = BB'' + CC''$.

8) $\mathfrak{P}A'' + \mathfrak{P}B'' = \mathfrak{P}C'' + \mathfrak{P}D''$.

Es sei $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ eine beliebige nicht durch $\mathfrak{P}$ gezogene Grade, $\mathfrak{A}$ ein beliebig auf derselben angenommener Punkt, u. AA''', BB''', CC''', DD''', $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$, beliebig an dieselben gerichtete Parallelen.

9) $4\,\mathfrak{P}\mathfrak{P}' = AA''' + BB''' + CC''' + DD'''$.

10) $4\,\mathfrak{A}\mathfrak{P}' = \mathfrak{A}A''' + \mathfrak{A}B''' + \mathfrak{A}C''' + \mathfrak{A}D'''$.

III. Es sei $\mathfrak{B}$ ein beliebiger Punkt, u. aus $\mathfrak{P}$ sei mit $\mathfrak{P}\mathfrak{B}$ ein Kreis beschr., so ist für alle Punkte dieses Kreises:

11) $\mathfrak{B}A^2 + \mathfrak{B}B^2 + \mathfrak{B}C^2 + \mathfrak{B}D^2 = 4\mathfrak{P}\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{P}A^2 + \mathfrak{P}B^2 + \mathfrak{P}C^2 + \mathfrak{P}D^2 = 4\mathfrak{P}\mathfrak{B}^2 + \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2)$.

B. Zum zweiten Kapitel des dritten Abschnitts.

244. Lehrs. Wenn man die Verlängerungen der Seiten eines Qdrts., jede gleich der halben Diag. macht, so hat man die Scheitel eines regul. Achtseits, von demselben Mittelp. als das gegebene Qdrt. und von doppeltem Umfange.

245. Lehrs. Wenn man die Seiten eines gleichseitigen Triangels in drei gleiche Theile theilt, so sind die Theilungspunkte die Scheitel eines in dem Tr. eingeschriebenen regul. Sechsseits; der Inhalt und der Umfang dieses Sechsseits sind respective $\frac{2}{3}$ von dem Inhalte u. von dem Umfange des gleichseitigen Triangels.

246. Lehrs. Verlängert man alle Seiten eines regulären Sechsseits, bis daß zwei und zwei sich schneiden, so bildet man ein Zwölfseit mit eingehenden Winkeln, dessen Inhalt und Umfang respective das Doppelte von dem Inhalte und Umfange des gedachten Sechsseits sind. Ueberdem sind die Punkte, in welchen die Verlängerungen sich schneiden werden, die Scheitel eines regul. Sechsseits,

dessen Inhalt das Dreifache von dem Inhalte des erstern ist.

247. Lehrs. Jedes regul. Zwölfseit ist gleich dem Odrte. über der Seite des in demselben Kreise eingeschr. gleichseitigen Dreiseits.

248. Lehrs. Wenn ein Polygon in zwei concentrischen Kreisen ein u. umschrieben ist, so ist es regul.

249. Lehrs. Ein um den Kreis beschr. Polygon ist regulär, wenn es gleichseitig, oder wenn es gleichwinklig ist. Dasselbe gilt auch für ein eingeschr. Polygon.

250. Lehrs. Wenn man die Verlängerungen von allen Seiten eines Odrts., jede gleich einer Seite macht, so hat man die Scheitel eines eingeschr. Polygons, welches 7mal so groß als das gegebene Odrt. ist.

251. Lehrs. In einem gegebenen Kreise 5 gleiche Odrte. einzuschr., von welchen eins dem Kreise concentrisch ist, u. die andern um dieses herum liegen, und mit ihm eine Seite gemein haben.

252. Lehrs. In jedem regul. Fünfseit: 1) jede Diag. ist zu einer Seite parallel; 2) die Diag. scheiden sich wechselseitig in den Scheiteln eines zweiten regul. Fünfseits nach stettigem Verhältniß; 3) wenn man jedes Apothem dieses zweiten Fünfseits um sich selbst verlängert, so gelangt

man zu den Mittelpunkten von fünf neuen regul. dem zweiten gleichen Polygonen, u. von welchen ein W. von jedem ein W. des erstern ist.

253. Aufg. In einem gegebenen Kreise 6 reguläre gleiche Fünfseite einzuschr., von welchen eins concentrisch ist, und die andern um das erste herum liegen, und mit ihm eine Seite gemein haben.

254. Lehrs. Wenn man in einem regul. Polygon alle Diag., die davon Tr. abschneiden, zieht, so bilden diese Diag. durch ihre Durchschnitte ein regul. concentrisches Polygon von gleichem Namen mit dem gegebenen.

255. Lehrs. Wenn man aus irgend einem Punkt in der Fläche eines regul. Polygons Prpd. auf seine n Seiten fällt, so beträgt die Summe dieser Prpd. n mal den Halbm. des eingeschr. Kreises.

256. Lehrs. Der Inhalt zwischen zwei concentrischen Kreis-Umfängen, ist gleich einem Kreise, dessen Durchm. die Tangente des kleinern Kreises, so weit sie im größern Kreise liegt, ist.

257. Lehrs. Die Entfernungen des Kreis-Mittelp. von einem Scheitel des umschr. gleichseitigen Tr., und von der Mitte einer Seite des eingeschr. gleichseitigen Tr., sind respective das Doppelte u. die Hälfte des Halbmessers.

258. Lehrs. Der Prpd. aus einem Punkt der Peripherie auf den Durchm., ist der Durchm. eines andern Kreises gleich dem, was übrig bleibt, wenn man von dem gegebenen Halbkreise die beiden über den zwei Abschnitten des Durchm. beschr. Halbkr. abzieht.

259. Lehrs. Wenn man durch den Punkt, in welchem sich mehrere Kreise berühren, eine beliebige Secante zieht, so verhalten sich die entstehenden Sehnen wie die Peripherie der Kreise, zu welchen sie gehören.

260. Lehrs. Es seien zwei ähnl. regul. Polygone, von welchen das eine umschr., das andere eingeschrieben ist, und des letztern Winkelspitzen in den Berührungsp. der Seiten des erstern liegen; wenn man über einer von diesen Seiten als Durchm. einen Kreis beschreibt, so schneidet diese Peripherie auf den geraden Linien von dem Endp. dieses Durchmessers zum Mittelp. des gegebenen Kr., die Seiten eines dritten regul. Polygons ab, welches den beiden ersten ähnlich, und gleich ihrer Differenz ist.

261. Lehrs. Nachdem man, wenn aus dem Mittelp. eines regul. Polygons, nach den Winkelsp. u. nach der Mitte der Seiten gerade Linien gezogen worden, auf diesen Linien Prpd. fällt, so, daß der erste

aus der Mitte einer Seite ausgehend, die andern aus dem Fußpunkt von dem ihm unmittelbar vorhergehenden ausgehen, so bilden diese Prpd. eine geometrische Progression, desgleichen die Tr., deren Grdl. sie sind, u. die zum gemeinschaftlichen Scheitel den Mittelpunkt des gegebenen Kreises haben.

262. Lehrs. Läßt man ein Odrt. auf einer fixirten geraden Linie sich wälzen, so ist die durch diese Grade und durch die durch einen Scheitelp. des Odrts. beschriebene Curve, von dem Augenblick an, in welchen dieser Scheitelp. aus der Graden tritt, bis daß er wieder in denselben eintritt, gleich dem Kreise, dessen Halbm. die Seite des gegebenen Odrts. ist.

263. Aufg. Zwei Linien zu finden, deren Unterschied gleich einer gegebenen Linie ist, und welche selbst die mittlern Glieder einer Proportion bilden, deren äußere Glieder zwei gleichfalls gegebene Linien sind.

264. Aufg. Eine gegebene Linie so zu theilen, daß das Rect. aus der ganzen Linie und dem kleinern Theile, zum Odrte. des größern Theils, ein gegebenes Verh. habe.

265. Aufg. Zwei Linien zu finden, deren Summe gegeben ist, u. welche die mittlern Gl. einer Proportion bilden, deren äußere Gl. bekannt sind.

266. Aufg. Einer gegebenen Linie ein solches Stück zuzusetzen, daß das Qdrt. der ganzen Linie u. das Rect. aus der gegebenen Linie u. dem angesetzten Theil, ein gegebenes Verh. haben.

267. Aufg. Zwei Linien zu finden, deren Summe oder Differenz u. deren Verh. gegeben ist.

268. Aufg. In einer Linie, die in zwei ungleiche, aber bekannte, Abschnitte abgetheilt ist, soll ein Punkt bestimmt werden, so, daß von den nunmehr entstehenden drei, neben einander liegenden, Abschnitten der ganzen Linie, einer die mittlere Prop. zwischen den beiden andern wird.

269. Aufg. Eine Linie AB, ist in einem Punkte C beliebig getheilt; man soll einen Punkt D in ihr bestimmen, so, daß die Qdrte. der drei Linien AC, AD und AB, eine stettige arithm. Proportion bilden.

270. Aufg. In den Endp. A u. B u. in der Mitte C einer Graden AB sind Prpd. errichtet, u. in dem mittlern Prpd. ist ein Punkt D gegeben; man soll durch D eine Linie so ziehen, daß das Rect. aus den beiden Abschnitten der Endperpen-

dikel gleich der Qdrte. der gegebenen Linie AB sei.

271. Aufg. In den Schenkeln eines gegebenen W. BAC sind wechselseitig zwei Punkte D u. E gegeben; man soll eine Linie unter einem gegebenen W. zwischen den Schenkeln so ziehen, daß die dadurch entstehenden neuen Theile, vom Scheitel an gerechnet, mit den beiden erstern gegebenen in Proportion stehen.

272. Aufg. Einen Tr. zu zeichnen, wo die Qdrte. der Seiten sich wie drei gegebene Linien verhalten.

273. Aufg. In einem gegebenen W. einen Tr. vom gegebenen Inhalt so abzuschneiden, daß die Linie, wodurch dieses geschiehet, durch einen außerhalb oder innerhalb des W. gegebenen Punkt gehet.

274. Aufg. Ein Tr. zu zeichnen, wenn ein W., der Prpd. aus der Spitze dieses W. auf der Gegenseite, u. das Verh. der dadurch auf dieser Seite entstehenden Abschnitte gegeben sind.

275. Aufg. Ein Tr. zu zeichnen, wenn die Summe zweier Seiten, der davon eingeschlossene W. u. das Verh. gegeben sind, in welchen ein Prpd. von der Spitze des gegebenen W. die Gegenseite theilt.

276. Aufg. Einen Tr. zu zeichnen, wenn eine Seite als Grdl., die Differenz der dieser Seite anliegenden W., u. die Höhe, gegeben sind.

277. Aufg. Einen Tr. zu zeichnen, wenn die Summe zweier Seiten, und die Abschnitte auf der dritten Seite, worin ein Prpd. aus dem Gegenwinkel sie theilt, bekannt sind.

278. Aufg. Eine Figur zu zeichnen, die gleich einer gegebenen Figur und einer gegebenen dritten ähnlich ist.

279. Aufg. In einem gegebenen Tr. einen Tr. einzuzeichnen, der einem gegebenen Tr. ähnlich ist, u. dessen Winkelspitzen in den Seiten des gegebenen Trs. wechselseitig liegen, so, daß diejenige Seite des gesuchten Trs., die einer bestimmten Seite des ihm ähnlichen entspricht, mit einer auch bestimmten Seite des gegebenen Trs., einen gegebenen W. bildet.

280. Aufg. In einem Tr. eine Fig., so zu zeichnen, daß sie einer gegebenen Fig. ähnl. werde, u. daß von ihr wenigstens drei Winkelsp. wechselseitig in den drei Seiten des Trs. liegen.

Ist diese Aufg. immer möglich, oder giebt es Ausnahmen?

281. Aufg. Einen gegebenen gleichschenkligen Tr. durch drei Prpd. auf seinen Seiten aus einem innerhalb des Trs. zu findenden Punkt zu theilen.

282. Aufg. Zwischen den Schenkeln eines gegebenen W., mittelst der kleinstmöglichen Linie, einen Tr. von einem gegebenen Inhalte abzuschneiden.

Daraus ergiebt sich der Lehrsatz:

Unter allen gleichen Tr., die einen gleichen W. haben, ist die diesem W. gegenüber liegende Seite die möglich kleinste, wenn der Tr. gleichschenklig ist.

283. Aufg. Einen gegebenen Tr. in einen andern zu verwandeln, der zwei gegebene W. hat.

284. Aufg. Eine gegebene Linie so zu theilen, daß die Summe der Qdrte. beider Theile gleich dem Qdrte. einer gegebenen Linie ist.

285. Aufg. In einem Qdrte. ein andres Qdrt. einzuzeichnen, daß $\frac{n}{m}$ von dem gegebenen Qdrt. ist, u. dessen Winkelsp. wechselseitig in den Seiten des gegebenen Qdrts. liegen.

Darf $\frac{n}{m}$ beliebig sein?

286. Aufg. In einer Kreislinie, sind zwei Punkte gegeben; man soll einen dritten Punkt finden, der mit den beiden gegebenen verbunden, zwei Sehnen giebt, die ein gegebenes Verh. zu einander haben.

287. Aufg. Aus einem, außerhalb eines gegebenen Kreises bestimmten Punkt, eine Secante zu ziehen, deren Abschnitte ein gegebenes Verh. zu einander haben.

288. Aufg. Aus den Endp. einer außerhalb eines gegebenen Kreises bestimmten Linie, zwei Secanten nach einem zu bestimmenden Punkt in der Peripherie zu ziehen, daß die Sehnen, welche die Durchschnittsp. der Sec. mit dem Kr. verbindet, parallel mit der gegebenen Linie läuft.

289. Aufg. Innerhalb oder außerhalb eines gegebenen Kr. sind zwei Punkte bestimmt; man verlangt einen zweiten Kr., der durch diese Punkte geht, u. zugleich die Periph. des erstern Kreises halbirt.

290. Aufg. Zwei Linien sind der Länge nach gegeben, und in einer derselben ein Punkt; man soll in dieser Linie einen zweiten Punkt finden, so, daß wenn man aus ihm als Mittelpunkt einen Kreis beschr., derselbe durch den erstern Punkt gehet u. die andere Linie berührt.

291. Aufg. Zwei Linien sind der Lage u. die eine auch überdem der Größe nach gegeben; man soll einen Kreis beschr., der die unbestimmte Linie berührt u. die zweite als Sehne enthält.

292. Aufg. Zwei Punkte u. eine gerade Linie sind der Lage nach gegeben; man soll in der Linie einen

Punkt bestimmen, in welchem man die zwei gegebenen Punkte hinter dem größt-möglichen Winkel sieht.

293. Aufg. Innerhalb eines gegebenen Kr. eine beliebige Anzahl Kreise zu beschr., die alle die gegebenen Kr., u. sich wechselseitig, je zwei u. zwei einander, berühren, vorausgesetzt, daß man die Periph. in die verlangte Anzahl gleicher Theile theilen kann.

294. Aufg. Innerhalb eines regul. nSeits nKr. einzuzeichnen, wo jeder eine Seite oder zwei Polygonseiten, und je zwei und zwei Kreise einander berühren.

295. Aufg. Den W. zu messen, den zwei sich schneidende Kreisbogen bilden.

296. Aufg. Im Tr. ist eine Sehne BC gegeben; u. in ihrer Verlängerung ein Punkt A, auch vom Umfang ein Bogen CF bestimmt; man soll aus A eine zweite Sehne DE ziehen, deren Verl. durch A gehet, so, daß die Summe der abgeschnittenen Bogen DB, EC, dem Bogen CF gleich sei.

297. Aufg. Man soll aus einem der Durchschnittsp. zweier sich schneidenden Kr. zwei Sehnen so ziehen, daß die Abschnitte, die von ihnen zwischen verschiedenen Peripherien liegen, zu einander ein gegebenes Verh. haben.

298. Aufg. Von einer in C geschnittenen gegebenen Graden-Linie BG soll der Abschnitt BC in H so getheilt werden, daß die Theile BH u. HC sich verh., wie BG u. GC.

299. Lehrs. Fällt man aus dem einen Endp. einer Sehne auf den Durchm. einen Prpd., u. legt an den andern Endp. der Sehne eine Tangente, bis sie den verlängerten Prpd. schneidet, so ist das doppelte Rect. aus der Tangente u. dem Prpd. im Kreise gleich dem Rect. aus dem Durchm. u. der Sehne.

300. Lehrs. Der Umfang eines regul. Polygons im Kreise verh. sich zum Umfange eines regul. Polygons von doppelt so vielen Seiten in demselben Kreise, wie eine Diag. des erstern zum Durchm.

301. Lehrs. Der Inhalt eines regul. Polygons im Kreise verh. sich zu dem Inhalte eines regul. Polygons von doppelter Seitenzahl in demselben Kreise, wie der Prpd. aus dem Mittelp. auf die Seite des erstern zum Halbmesser.

302. Lehrs. Das Qdrt. einer Seite des regul. Polygons im Kr. verh. sich zu jedem Tr., worin das regul. Polygon von doppelter Seitenzahl in demselben Kreise durch Halbm. getheilt wird, wie die halbe Seite des erstern Polygons zum achten Theile des Halbmessers.

303. Lehrs. Sind in einerlei Kreise zwei regul. Polygone construirt, von denen das eine die doppelte Seitenzahl des andern hat: so ist die Seite des von doppelter Seitenzahl die mittlere Proportionallinie zwischen dem Halbm. u. dem Unterschiede des Durchm. u. der Sehne des Bogens, welcher den Bogen von einer Seite des Polygons von der einfachen Seitenzahl zum Halbkr. ergänzt.

304. Lehrs. Werden die Seiten eines regul. Polygons in Kr. halbirt, u. die Halbirungsp., wie sie auf einander folgen, durch Grade verbunden: so erhält man ein inneres dem gegebenen ähnl. Polygon, u. es verh. sich:

1) die Seite des gegebenen Polygons zur Seite des ihm eingeschr. wie der Halbm. zum Abstand einer Seite des gegebenen Polygons vom Mittelpunkte.
2) der Flächeninhalt des gegebenen Polygons zum Flächeninhalt des ihm eingeschr. wie der Halbm. zum Abstande einer Seite des letztern Polygons.

305. Lehrs. Sind in u. um einen Kr. regul. Polygone von gleichem Namen beschrieben, so verhält sich der Flächeninhalt des umschr. zum Flächeninhalt des eingeschr. wie der Halbm. zum Abstande einer Seite des eingeschr. Polygons vom Mittelpunkt.

306. Lehrs. Wenn nach (304. Lehrs.) in einem regulären Polygon ein Polygon, u. in diesem wieder

auf eben die Weise ein drittes Polygon beschrieben wird: so ist die Seite des zweiten Polygons die mittlere Proportionallinie zwischen den Seiten der beiden andern, u. das Polygon selbst die mittlere Proportionalebene zwischen den beiden andern Polygonen.

307. Lehrs. Das regul. Polygon p im Kr., das ihm ähnl. p′ um den Kr., u. das um den Kr. beschriebene regul. Polygon P von halber Seitenzahl sind stettig harmonisch proportionirt, d. h.

$$p : P = p' - p ; P - p'.$$

308. Lehrs. Wenn der Durchm. AB eines Kreises in C u. D harmonisch getheilt wird, so findet für jeden Punkt E der Periph. die Eigenschaft Statt, daß die Linien EC, ED, ein unveränderliches Verhältniß haben, welches dem der Abschnitte AC, AD, oder BC, BD, gleich ist, u. daß die Grade EA den W. CED, so wie die Grade EB den Nebenw. CEG halbirt.

309. Lehrs. Wenn in einem Vierseit im Kreise eine Diag. durch die andere halbirt wird, so sind die beiden Rect. je zweier der halbirten Diag. anliegenden Seiten einander gleich.

310. Lehrs. Wenn aus einem außerhalb befindlichen Punkt A an den Kreis eine berührende AB, u. eine Secante ACD gezogen, auch die Durch-

schnittsp. B, C, D, durch gr. Linien verbunden werden, so finden folgende Relationen Statt:

1) das Rect. der Tangente u. einer Verbindenden ist dem Rect. des anliegenden Abschnitts u. der andern Verbindenden gleich, nemlich:

$AB \cdot BC = AC \cdot BD$ u. $AB \cdot BD = AD \cdot BC$;

2) der Unterschied der Qdrte. des Abschnitts u. der Berührenden ist gleich dem Rect. des Abschnitts u. der Sehne, nemlich:

$AD^2 - AB^2 = AD \cdot CD$; $AB^2 - AC^2 = AC \cdot CD$;

3) $AC : AD = AC^2 : AB^2 = : AB^2 : AD^2 = BC^2 \cdot BD^2$;

4) Beschreibt man Kr. um die Tr. ABD, ABC, u. zieht aus A an denselben Tangenten AE, AF, so sind sie den Verbindenden BC, BD, gegenseitig parallel.

311. Lehrs. Wenn durch einen innerhalb des Kreises befindlichen Punkt A, zwei Sehnen BC, DE gezogen werden, von welchen die eine BC in A halbirt ist, u. man die Verbindenden BE, CD zieht, so finden folgende Relationen Statt:

1) das Qdrt. der halben Sehne BC, (die wir Mittelsehne nennen wollen,) ist gleich dem Rect. der Abschnitte, nemlich:

$$AB^2 = AC^2 = AD \cdot AE;$$

2) das Rect. der halben Mittelsehne u. einer Verbindenden ist dem Rect. des anliegenden Ab-

schnitts und der andern Verbindenden gleich, nemlich:

$AB \cdot CD = AD \cdot BE$ u. $AC \cdot BE = AE \cdot CD$;

3) die Summe der Qdrte. eines Abschnitts u. der halben Mittelsehne ist dem Rect. dieses Abschnitts u. der Sehne gleich, nemlich:

$AD^2 + AB^2 = AD \cdot AE$ u. $AE^2 + AB^2 = AE \cdot CD$;

4) $AD : AE = AD^2 : AB^2 = AB^2 : AE^2 = CA^2 : BE^2$;

5) Wenn man Kr. um die Tr. ACD, ABE, beschr., u. daran aus A Tangenten AF, AG, zieht, so sind sie den Verbindenden BE, CD, gegenseitig parallel.

Was zeigt die Vergleichung dieses Satzes mit dem vorhergehenden?

312. Lehrs. Wenn ein Durchm. AB auf eine der Lage nach gegebenen Graden in C perpendicular, so ist für alle durch einen Endp. B des Durchm. gehende, jene Grade in D, den Kreis in E schneidende gr. Linien, das Rect. der Abschnitte DB, EB, von unveränderlicher Größe; u. zwar dasselbe gleich dem Rect. zwischen dem Durchm. AB u. dem Abstande BC jenes Endp. von der Graden.

313. Lehrs. Wenn auf den Durchm. AB aus einem beliebigen Punkt E einer Sehne CD, ein Prpd. EF gezogen wird, so ist das Rect. der Abschnitte EC, ED, auf der Sehne, für einen innern Punkt E kleiner, u. für einen äußern Punkt E größer, als das Rect. der Abschnitte FA, FB auf dem Durchm.;

u. zwar ist der Unterschied dem Qdrte. des Prpd. EF gleich. Nemlich:

für einen innern Punkt ist $EC.ED = FA.FB - EF^2$,

für einen äußern Punkt ist $EC.ED = FA.FB + EF^2$.

314. Lehrs. Wenn in einem Kreisviereit ABCD eine Diag. BD verlängert durch denselben Punkt E geht, in welchem die in den Endp. der andern Diag. AC an den Kreis gezogenen Tang. AE, CE, einander schneiden, so finden folgende Relationen Statt:

1) die beiden Rect. je zweier Gegensehnen sind einander gleich;

2) die andere Diag. AC geht verlängert gleichfalls durch den Punkt F, in welchem die in den Endp. der ersten BD an den Kr. gezogenen Tang. BF, DF einander schneiden;

3) jede Diag. wird in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitt G u. in dem Vereinigungsp. der Tangenten harmonisch getheilt, nemlich die BD in G u. E, die AE in G u. F:

$EB.DG = ED.BG$; oder $DG:BG = DE:BE = AD^2 : AB^2 = CD^2 : BC^2$.

$FC.AG = FA.CG$; oder $AG:CG = AF:CF = AD^2 : CD^2 = AB^2 : BC^2$.

315. Lehrs. Wenn eine Sehne AB in C u. D harmonisch getheilt wird, so verh. sich die Abstände jedes Endp. der Sehne vom innern Theilp. C u.

vom äußern Theilp. D, wie die halbe Mittelsehne des innern Theilp. zur Tang. des äußern Theilp.

$AC : AD = BC : BD = CE : DF.$

316. Lehrs. Wenn aus versch. Punkten A einer gr. Linie, Tangentenpaare AB, AC, in den Kreis, u. die Verbindungssehnen BC der Berührungsp. gezogen worden, so durchschneiden sämmtliche Verbindungssehnen einander, gehörig verlängert, in einerlei Punkt N, welcher innerhalb des Kreises liegt, wenn jene Grade den Kr. nicht schneidet, außerhalb aber, wenn sie ihn schneidet.

Dieser Punkt ist dadurch gegeben, daß die Rect. der Abstände des Mittelp. M vor ihm u. jener Grade dem Qdrt. des Halbm. gleich ist, nemlich:

$$MN \cdot MH = r^2.$$

317. Lehrs. In einem Kreisvierseit ABCD, dessen Diagonalsehnen sich in E schneiden, u. dessen Seiten bis zu ihren Durchschnittsp. F, G verl. werden, verhalten sich auf jeder Sehne die beiden Abschnitte, wie die Rect. der anliegenden Sehnen zu einander; man hat daher folgende 6 Gleichungen:

1) $AE : CE = BA \cdot AD : BC \cdot CD;$
2) $BE : DE = AB \cdot BC : AD \cdot DC.$
3) $AF : DF = BA \cdot AC : BD \cdot DC.$
4) $BF : CF = AB \cdot BD : AC \cdot CD.$
5) $AG : BG = DA \cdot AC : DB \cdot BC.$
6) $DG : CG = AD \cdot DB : AC \cdot CB.$

318. Lehrs. Wenn eine Sehne AB u. eine in E Berührende CD gezogen u. bis zu ihrem Durchschnitt F verlängert werden; wenn ferner in dem Endp. der Sehne Tang. AC, BD, angelegt werden, so ist die CD in E u. F harmonisch getheilt. Nemlich:

$$DF \cdot CE = CF \cdot DE.$$

Auch verhält sich das Rect. der Abschnitte CE, DE, zum Qdrt. des Halbm., wie sich auf dem durch den Berührungsp. E gezogenen u. von der Sehne AB in K geschnittenen Durchm. EH die Abschnitte EK, HK, verhalten.

319. Lehrs. Wenn ein Durchm. AB gezogen, und mehrere Tr. EFG so in den Kr. beschr. werden, daß jede erste Seite FG prd. auf dem Durchm. sei, u. jede zweite Seite EF in einerlei Punkt C des verl. Durchm. treffe, so trifft auch jede dritte Seite EG in einerlei Punkt D des Durchm., so daß derselbe in C und D harmonisch getheilt ist. Nemlich:

$$AC \cdot BD = BC \cdot AD.$$

320. Lehrs. Wenn eine Sehne AB gezogen, in ihrem Endp. Berührende AH, BH, an den Kr. gelegt werden, welche in H zusammentreffen; und mehrere Tr. EFG so in den Kr. beschr. werden, daß jede erste Seite FG in den Vereinigungsp. H der Berührenden, jede zweite Seite EF aber in einerlei Punkt der verl. Sehne AB trifft, so trifft auch jede dritte Seite EG in einerlei Punkt D dieser Sehne,

so daß dieselbe in C u. D harmonisch getheilt ist. Nemlich: AC . BD = BC . AD.

321. Lehrs. Wenn mit einer Seite AB eines Kreisvierseits ABCD mehrere Parallelsehnen EF gezogen werden; welche von der gegenüber liegenden CD in G, von den anliegenden AD, BC, in H u. I, geschnitten werden, so ist für alle das Rect. der Abschnitte GE, GF am Umfang, dem Rect. der Abschnitte GH, GI, an den Seiten, gleich:

GE . GF = GH . GI.

322. Lehrs. Wenn in dem Endp. einer Sehne AB die beiden in C zusammentreffenden Tangenten AC, BC, an den Kr. gezogen werden; so ist auf allen beliebig gerichteten Parallelsehnen GI, welche die Sehne in H, die Tangenten in K u. L, schneiden, in Beziehung auf die vom Umfang genommenen Abschnitte zur Sehne u. zu den Tang. GH, GK, GL, oder IH, IK, IL, das Verh. des Qdrts. des ersten zum Rect. der beiden andern, unveränderlich. Zieht man nemlich eine Parallelsehne DF, welche die angenommene AB in E trifft, so daß sie verl. durch den Durchschnitt C der Tang. geht, so ist jenes Verh. demjenigen gleich, welches das Rect. der Abschn. AE, BE, auf der Sehne, zum Qdrt. der Tang. AC hat. (Vergl. 199. Lehrs.)

323. Lehrs. 1) Im Kr. können drei verschiedene Vierseite einerlei Seiten am Umfange u. einerlei

Fläche haben, ABCD, ADCE, DABF, u. ihnen kommen alsdann drei versch. Diag. zu, AC, BD, DE oder AF.

2) In jedem Kreisvierseit ist die Summe der beiden Rect. je zweier Gegenseiten, dem Rect. der Diag. gleich.

3) In jedem Kreisvierseit verhalten sich die beiden Diag. wie die Summe der beiden Rect. je zweier anliegenden Seiten.

4) Wenn man aus den vier Seiten des Kreisvierseits sechs Rect. bildet, u. die Summe von je zwei derselben in gleiche Qdrte. verwandelt; deren Seiten A, B, C, sind, so ist das Rect. einer Diag. u. einer Quadratseite, dem Rect. der beiden andern Quadratseiten gleich.

Nemlich:

$$AC \cdot B = A \cdot C$$
$$BD \cdot C = B \cdot C$$
$$DE \cdot B = C \cdot B.$$

324. Aufg. Im Kreisvierseit aus den vier Seiten desselben die Abschnitte auf den einander schneidenden Diag. u. verl. Seiten zu finden.

325. Aufg. In einem Kreisvierseit, aus den vier Seiten den Flächeninhalt und den Durchm. des Kreises zu finden.

326.

326. Lehrs. 1) In einem Kreisvierseit ABCD wird jede Seite oder Diag. harm. getheilt in den beiden Punkten, erstlich in welchen die Gegenseite der Diag. sie trifft, zweitens in welchen sie von der Verbindungsl. der Durchschnittsp. der beiden andern Seitenpaare geschnitten wird.

Anmerk. Dieser Satz gilt für jedes vollständige Vierseit, wenn es auch kein Kreisvierseit ist. Eine geradlinige Figur von einer gegebenen Anzahl Winkelspitzen heißt einfach, wenn nur sämmtliche Winkelsp. durch gr. Linien verbunden sind; vollständig dagegen, wenn sämmtliche Verbindungslinien bis zu ihren Durchschnittspunkten verlängert, u. diese Durchschnittsp. mit zu den Winkelsp. der Figur gezählt werden.

Z. B. Ein einfaches Vierseit hat 4, ein vollst. Vierseit aber 7 Winkelspitzen.

Ein einfaches Fünfseit hat 5, u. ein vollst. hat 20 Winkelspitzen.

2) Im Kreisvierseit ist das Verh. der harm. Theilung auf jeder Seite u. Diag., aus den Rect. der Seiten u. Diag. gegeben.

327. Lehrs. 1) Bei einem vollständigen Kreisvierseit ABCD, in welchem die Durchschnittsp. E, F, G, der Diag. u. verl. Seiten durch gr. Linien verbunden sind, liegt der Vereinigungsp. der in je zweien Winkelspitzen an den Kr. gezogenen Tang. in einer der drei Verbindungsl., u. zwar in derjenigen, welche die Durchschnittsp. der bei-

den anliegenden Paare von Seiten oder Diag. verbindet.

Es liegen also in EG die Vereinigungsp. der Tang. in B, C, in A, D; in EF liegen die Vereinigungsp. der Tang. in A, B, u. C, D; in FG liegen die Vereinigungsp. der Tang. in A, C, u. B, D.

2) Wenn die Verbindungsl. EG, EF, den Kr. in den Sehnen UV, WX schneiden, so trifft der Vereinigungsp. der in U, V, an den Kr. gezogenen Tang. in den Durchschn. F der Seiten BC, AD; u. der Vereinigungsp. der in W, X, gezogenen Tang. trifft in den Durchschnitt G der Seiten BA, CD.

Auch wird die Sehne UV in E, G, u. die Sehne WX in E u. F, harm. getheilt.

328. Lehrs. Wenn zwei prlle. Sehnen AB, CD, in den Kr. gezogen werden, so finden folgende Eigenschaften in Beziehung auf eine willkührlich durch den Durchschnittsp. E der Diag. AC, BD, gezogene Sehne GEH Statt:

1) Die Rect. zwischen den auf den Endp. der Sehne GH, nach den gleichnamigen Endp. der Parallelsehnen Gezogenen, sind einander gleich, nemlich: GA.HD=GB.HC u. GD.HA=GC.HB.

2) Verbindet man die Endp. der Sehne GH mit

den wechselnamigen Endp. der Parallelsehnen, bis diese Linien zusammentreffen, nemlich GB, HD in I, u. GA, HC, in K, so ist die Verbindungslinie IK dieser Durchschnittsp. der Parallelsehnen AB, CD, parallel.

3) Zieht man aus den Durchschnittsp. I, K, Tang. IL, KT, an den Kr., so ist durch diese das Verh. der Abschnitte vom Umfang zu den Durchschnittsp. gegeben, nemlich:

$BG:AG = IG:KG = IB:KA = DH:CH = IH:KH = ID:KC = IL:KT.$

4) Die Vereinigungsp. der in den wechselnamigen Endp. der Parallelsehnen an den Kr. gezogenen Tangenten BN, DN, u. AO, CO, liegen in der Verbindungslinie IK der Durchschnittsp., u. sind aus dem Abstande derselben, u. ihren Tangenten IL, KT, gegeben, so daß

$IN.IK = IL^2$, u. $KO.IK = KT^2$.

5) Theilt man die Verbindungsl. IK der Durchschnittsp. harmonisch in P u. Q, im Verh. der Tang. IL, KT, so nemlich, daß $IP:KP = IQ:KQ = IL:KT$, u. beschr. über PQ als Durchmesser einen Kr., so schneidet derselbe den gegebenen in den Endp. der Sehne GH.

6) Wenn S der Mittelp. u. R der Halbm. dieses zweiten Kr. ist, so hat man, wie bei jeder har-

monischen Theilung, zur Bestimmung derselben die Relationen:

$$R : IK = IL \,.\, KT : (KT^2 - IL^2),$$

u. $R^2 = SI \,.\, SK.$

7) Die aus dem Mittelp. S des zweiten Kr. zu den Durchschnittsp. mit dem gegebenen Kr. Gezogenen SG, SH, berühren denselben.

Ein dritter über die Verbindungsl. SM der Mittelpunkte des ersten u. zweiten Kr. als Durchmesser beschriebener Kr. schneidet also beide ebenfalls in den Endp. der Sehne GH.

8) Die Verbindungsl. BC, AD, der Endp. der Parallelsehnen treffen in U in der diesen prllen. Verbindungsl. IK der Durchschnittsp. zusammen.

329. Lehrs. 1) Wenn in drei Punkten A, B, C, des Umfangs Tang. AD, BE, CF, gezogen u. selbige von den gegenüberliegenden Sehnen BC, AC, AB, in den Punkten D, E, F, geschnitten werden, so liegen diese drei Durchschnittsp. in einer gr. Linie.

2) Aus zwei Tang. ist die dritte dadurch gegeben, daß das Rect. zwischen einer u. der Summe oder dem Unterschied der beiden andern, dem Rect. dieser beiden andern gleich ist, nemlich:

$AD \,.\, (CF - BE) = CF \,.\, BE$; $BE\,(CF + AD) = CF \,.\, AD$; $CF \,.\, (AD - BE) = AD \,.\, BE.$

3) Das Qdrt. des Abstandes zweier von den drei Durchschnittsp. D, E, F, ist größer oder kleiner als die Summe der Qdrte. der aus diesen Punkten gezogenen Tangenten, um das Rect. derselben, nemlich:

$$DE^2 = DA^2 + EB^2 - DA \,.\, EB.$$
$$EF^2 = EB^2 + FC^2 - EB \,.\, FC.$$
$$DF^2 = DA^2 + FC^2 + DA \,.\, FC.$$

4) Die Tangenten u. die Abschnitte vom Umfang zu den Durchschnittsp. sind aus den drei Sehnen AB, BC, AC gegeben.

$$AD:BD:CD:BC = AB.AC:AB^2:AC^2:(AC^2-AB^2)$$
$$BE:CE:AE:AC = BC.AB:BC^2:AB^2:(BC^2-AB^2)$$
$$CF:AF:BF:AB = AC.BC:AC^2:BC^2:(BC^2-AC^2).$$

330. Lehrs. Wenn im Umfang sechs Punkte A, B, C, D, E, F, beliebig angenommen werden, so sind, wenn alle Sehnen bis zum Zusammentreffen verlängert werden:

1) in gr. Linie die Durchschnittsp. G, K, N, der Sehnen AB u. CD; AF u. DE; BE u. CF;

2) in gr. Linie die Durchschnittsp. H, L, O, der Sehnen BC u. ED; BA u. EF; CF u. DA;

3) in gr. Linie die Durchschnittsp. I, M, P, der Sehnen CD u. FE; FA u. CB; BE u. AD;

4) in gr. Linie die Durchschnittsp. R, S, T, der Sehnen AF u. CD; BA u. DE; EB u. EF;

5) die drei Graden GNK, HOL, IPM, schneiden einander in einerlei Punkt Q.

331. Lehrs. Wenn zwei Kreise einander schneiden und durch einen beliebigen Punkt C ihrer Durchschnittssehne AB zwei beliebige gr. L. gezogen werden, deren eine den ersten Kr. in DE, den zweiten Kr. in FG, deren andre den ersten Kr. in HI, den zweiten Kr. in KL schneidet, so sind DEKL u. FGHI, Kreisvierseite.

332. Lehrs. Wenn drei Kreise einander durchschneiden, so treffen die drei Durchschnittssehnen in einerlei Punkt zusammen.

333. Lehrs. Wenn zwei Kreise einander berühren, u. aus dem Berührungsp. A zwei beliebige gr. Linien gezogen werden, welche den ersten Kr. in B u. C, den zweiten Kr. in D u. E schneiden, so sind die Sehnen BC, DE, einander parallel.

334. Lehrs. 1) Wenn zwei Kr. A, B, von mehrern Kr. C berührt werden, so treffen alle Verbindungsl. DE der Berührungsp. in einerlei Punkt M zusammen, welcher sich in der Graden AB befindet.

2) Dieser Vereinigungsp. M liegt jenseit der Mittelp. A, B, wenn beide Kreise außerhalb oder beide innerhalb berührt werden; er liegt zwischen den Mittelp. A, B, wenn der eine von

beiden Kr. außerhalb, der andre innerhalb berührt wird.

3) Die Lage dieses Vereinigungsp. M ist aus den beiden Kr. gegeben, indem sich die Abstände MA, MB, verh. wie die Halbm. der Kr. A, B.

4) Auch ist für alle durch M gezogene den Kreis schneidende gr. Linie das Rect. der gleichnamigen Abschnitte unveränderlich, nemlich dem Rect. der Tangenten gleich.

335. Lehrs. Wenn drei Kreise A, B, C, einander je zwei u. zwei in den Punkten D, E, F berühren, u. die Berührungsp. je zweier Kr. bis zu der Mittelpunktslinie derselben verbunden werden, so ist, vom Durchschnittsp. genommen, das Rect. der Abstände zweier Berührungsp. auf der einen Graden dem Odrt. des Abstandes des dritten Berührungsp. auf der andern Graden gleich, nemlich:

$$ID \cdot IE = IF^2 = IO \cdot IP;$$
$$HD \cdot HF = HE^2 = HM \cdot HN;$$
$$GE \cdot GF = GD^2 = GK \cdot GL.$$

336. Lehrs. Wenn drei Kr. A, B, C, einander je zwei u. zwei in den Punkten D, E, F berühren, so ist die Lage u. Größe eines der drei Kr. aus dem Abstande seines Mittelp. von der die beiden andern berührenden Graden gegeben, durch folgende Relationen:

1) $CO \cdot (BF + AF) = CM \cdot (BF - AF)$.
2) $FM^2 = (CM - CO) \cdot (2BF - CM - CO)$.
wo AF, BF, CO die Halbm. der Kr.; CM der Abstand des Mittelp. C von der Tang. in F.

Für mehrere Kr. C, welche die beiden einander Berührenden A, B, berühren, hat der Halbm. zum prd. Abstande des Mittelp. C von der die Kr. A u. B. in F berührenden Graden FN ein unveränderliches Verhältniß.

337. Lehrs. Wenn zwei Kr. A, B, einander berühren, zwei andre Kr. C, K, gleichfalls einander u. jene beiden zugleich berühren, u. aus ihren Mittelp. Prpd. auf die Centrale AB gefällt werden, so verh. sich der Durchm. des einen zu seinem perpendikulären Abstande, wie der Durchm. des andern zur Summe dieses Durchm. und perpendikulären Abstandes; u. eben so der Durchm. des andern zu seinem perpd. Abstande, wie der Durchmesser des einen zum Unterschied dieses Durchm. u. prd. Abstandes.

338. Lehrs. Wenn innerhalb eines Halbkr. über seinen Durchm. AC zwei kleine einander u. den größern berührende Halbkr. über AB, BC beschr. werden, u. in dem hierdurch entstehenden Arbelus (so wird die durch drei nicht concentrische Kreise eingeschlossene Fläche genannt) ein erster Kr. D die

drei Halbkr. berührt; ein zweiter Kr. E den Kr. D u. die Halbkr. über AB, AC, berührt; ein dritter F dem Kr. E u. die Halbkr. über AB, AC, berührt; u. s. f., so finden folgende Relationen Statt:

1) Wenn man aus den Mittelp. dieser Kr. Prd. DD′, EE′, FF′ u. s. w. auf die Grdl. AC zieht, so ist der Durchm. des ersten Kr. D der Mittelpunktshöhe DD′ gleich; der Durchm. des zweiten Kr. E ist die Hälfte der Höhe EE′; der Durchm. des dritten Kr. F, ist ein Drittheil der Höhe FF′ u. s. w.

2) Wenn M der Mittelp. des Halbkr. über BC, u. BL prd. auf AC, also $AL^2 = AB \cdot AC$. ist, so ist das Verh. der Abschnitte, in welche die AM von jeder Höhe getheilt wird, durch folgende Relationen gegeben:

$AD' : D'M = AL^2 : BC^2$; $AE' : E'M = AL^2 : 4BC^2$;
$AF' : F'M = AL^2 : 9BC^2$; $AG' : G'M = AL^2 : 16BC^2$;
$AH' : H'M = AL^2 : 25BC^2$; u. s. w.

3) Für alle Kr. ist das Verh. des Durchm. zum Abstande der Höhe vom Berührungsp. A dasselbe, nemlich:

$DD' : AD' = \frac{1}{2}EE' : AE' = \frac{1}{3}FF' : AF'$
$= \frac{1}{4}GG' : AG' \ldots = BC : AM.$

339. Lehrs. 1) Wenn drei beliebige Kr., deren Mittelp. A, B, C sind, von einem vierten Kreise

in G, H, I, berührt werden, u. man je zwei Berührungs- u. Mittelp. bis zum Zusammentreffen verbindet, IH u. CB in D; IG u. CA in E: HG u. BA in F; so liegen diese drei Durchschnittsp. D, E, F, in welchen die Mittelpunktslinien im Verh. der Halbm. getheilt sind, in gr. Linie.

2) Theilt man noch jede Mittelpunktslinie BC, AC, AB, in einem zweiten Punkt D′, E′, F′, im Verh. der Halbm., so daß BC in D u. D′; AC in E u. E′; AB in F u. F′ harmonisch getheilt sind; so liegen auch in gr. Linie je drei Theilp. wie D′, E′, F; ferner D′, E, F′; ferner D, E′, F′.

Lehrsätze

über

irreguläre und reguläre eingeschriebene und um den Kreis beschriebene Polygone.

340. Lehrs. 1) Im eingeschr. beliebig unregelmäßigen Kreispolygon von gerader Seitenzahl, $=2n$ ist die Summe des 1sten, 3ten, 5ten, 7ten .... $(2n-1)$ten innern Winkels, gleich der Summe des 2ten, 4ten, 6ten, 8ten ..... 2nten innern Winkels; u. jede dieser Summen verhält sich zu einem rechten W., wie die um 2 verminderte Winkelzahl zu 1.

2) Im eingeschr. beliebig unregelm. Kreispolygon von ungerader Seitenzahl $=2n+1$ ist, wenn man den letzten W. durch einen Halbm. in zwei Theile theilt, die Summe des 1sten, 3ten, 5ten, u. s. w., und des vom ersten W. abgewandten Theils des letzten innern W., gleich der Summe des 2ten, 4ten, 6ten u. s. w., u. des dem ersten W. zugewandten Theils des letzten innern W.; u. jede dieser Summen verh. sich zu einem rech-

ten W. wie die um zwei verminderte Winkelzahl zu 1.

341. Lehrs. 1) Im umschr. beliebig unregelm. Kreispolygon von gr. Seitenzahl $= 2n$ ist die Summe der 1sten, 3ten, 5ten, 7ten ..... $(2n-1)$ten Seite gleich der Summe des 2ten, 4ten, 6ten, 8ten . . . 2nten Seite.

2) Im umschr. bel. unregelm. Kreispolygon von ungr. Seitenzahl $= 2n+1$, ist, wenn man die letzte Seite durch einen perpendikulären Halbm. in zwei Theile theilt, die Summe der 1sten, 3ten, 5ten u. s. w., u. des von der ersten Seite abgewandten Theils der letzten Seite, gleich der Summe der 2ten, 4ten, 6ten u. s. w., u. des der ersten Seite zugewandten Theils der letzten Seite.

342. Lehrs. 1) Die Fläche des umschr. regl. Polygons verh. sich zum Qdrt. des Halbm. eben so, wie der Umfang des umschrieb. Polygons zum Durchm. des Kreises.

2) Diese beiden Verh. sind auch demjenigen gleich, welches im eingeschr. reg. Polygon von gleicher Seitenzahl der Umfang desselben zu der Ergänzungssehne des Mittelpunktswinkels hat, d. h. zu der Sehne desjenigen W., der den Mittelpunktsw. zu zwei rechten ergänzt.

343. Lehrs. 1) Die Fläche des eingeschr. reg. Polygons verh. sich zu dem um die Winkelzahl ver-

vielfachten Qdrt. des Halbm., wie die halbe Sehne des doppelten Mittelpunktsw. zum Durchm.

2) In zwei demselben Kr. eingeschr. regl. Polygonen, wovon das eine die doppelte Winkelzahl des andern hat, verh. sich die Fläche des von doppelter Winkelzahl zum Qdrt. des Halbm., wie der Umfang des von einfacher Winkelzahl zum Durchm.

344. Lehrs. 1) Wenn dem Kr. zwei regl. Polygone, das erste von einfacher, das zweite von doppelter Winkelzahl, umschr. werden, so verh. sich die halbe Seite des von doppelter zur halben Seite des von einfacher Winkelzahl, wie der Halbm. des Kr. zur Summe desselben u. desjenigen Halbm., welcher dem dem Vielseit von einfacher Winkelzahl umschr. Kr. zugehört.

2) Wenn der Unterschied zwischen der halben Seite des von einfacher u. der Seite des von doppelter Winkelzahl genommen wird, so ist das Rect. zwischen diesem Unterschiede u. der halben Seite des von einfacher Winkelzahl, gleich dem Qdrt. des Unterschieds jener beiden Halbmesser.

3) Das Qdrt. des Halbm. des dem Polygon von doppelter Winkelzahl umschr. Kreises, verh. sich zum Qdrt. des Halbm. des demselben eingeschr. Kr., wie der Durchm. des dem Polygon von einfacher Winkelzahl umschr. Kreises, zur Summe der Halbm. des ihm eingeschr. u. umschr. Kreises.

345. Lehrs. Wenn dem Kr. zwei regl. Polygone, das erste von einfacher, das zweite von doppelter Winkelzahl eingeschr. werden, so verh. sich bei dem von doppelter Winkelzahl die Seite zur Ergänzungssehne, wie bei dem von einfacher Winkelzahl die Seite zur Summe der Ergänzungssehne u. des Durchm.

346. Lehrs. Wenn über einerlei Seite zwei regl. Polygone, das erste von einfacher, das zweite von doppelter Winkelzahl beschr. werden, u. jedem Polygon ein Kr. umschr. u. eingeschr. wird:

1) so ist die Summe der Halbm. des dem Polygon von einfacher Winkelzahl umschr. u. eingeschr. Kr., gleich dem Halbm. des dem Polygon von doppelter Winkelzahl eingeschr. Kreises;

2) das Rect. zwischen dem Halbm. des dem Polygon von doppelter Winkelzahl eingeschr., u. dem doppelten Halbm. des dem Vielseit von einfacher Winkelzahl umschr. Kr., ist dem Qdrt. des Halbm. des dem Polygon von doppelter Winkelzahl umschr. Kreises gleich;

3) der Unterschied der Halbm. des dem Polygon von einfacher Winkelzahl umschr. u. eingeschr. Kreises, vervielfacht mit der Winkelzahl des größern Polygons, verh. sich zur halben Seite, wie der Umfang des größern Polygons zum Durchm. des ihm eingeschr. Kreises.

347. Lehrs. Wenn dem Kr. zwei regl. Polygone

von einfacher Winkelzahl, desgl. zwei von doppelter Winkelzahl eingeschr. u. umschr. werden:

1) so ist die Fläche des eingeschr. von doppelter Winkelzahl, die mittlere geom. Proportionalfläche zwischen den Flächen des eingeschr. u. umschr. von einfacher Winkelzahl;

2) die Fläche des umschr. von doppelter Winkelzahl verh. sich zur Fläche des umschr. von einfacher Winkelzahl, wie die Fläche des eingeschr. von einfacher Winkelzahl zu der mittlern arithm. Proportionalfläche der beiden eingeschriebenen von einfacher u. doppelter Winkelzahl.

348. Lehrs. Wenn von zwei einander gleichen regl. Polygonen das zweite die doppelte Winkelzahl des ersten hat, u. jedem ein Kr. umschr. u. eingeschr. wird, so finden zwischen den Halbm. dieser Kreise folgende Relationen Statt:

1) das Rect. der Halbm. des dem Polygon von einfacher Winkelzahl umschr. u. eingeschr. Kr. ist gleich dem Qdrt. des Halbm. des dem Polygon von doppelter Winkelzahl umschr. Kreises.

2) Das Rect. zwischen dem Halbm. des eingeschr. u. der halben Summe der Halbm. des eingeschr. u. umschr. Kreises, beim Polygon von einfacher Winkelzahl, ist gleich dem Qdrt. des Halbm. des dem Polygon von doppelter Winkelzahl eingeschr. Kr.

349. Lehrs. Wenn auf dem Umfange eines Kr. drei

Punkte A, B, C, in gleichen Abständen von einander genommen werden, u. aus einem im Umfange außerhalb jener befindlichen Punkt D, oder zwischen jenen befindlichen Punkt D′, zu den äußern Punkten Sehnen DA, DC oder D′A, D′C gezogen werden, so ist im ersten Fall der Unterschied, im andern Fall die Summe dieser Sehne doppelt so groß, als der Abschnitt, welcher auf einer der Sehnen der aus dem mittlern Punkt gefällte Prpd. bildet.

350. Lehrs. 1) Wenn auf dem Umfange eines Kr. drei Punkte A, B, C in gleichen Abständen genommen u. die Sehnen AB = BC des einfachen Bogens, AC des doppelten Bog., gezogen werden, so ist für jeden im Umfange außerhalb jener befindlichen Punkt D, oder zwischen jenen befindlichen Punkt D′, im ersten Fall das Verh. der Summe der äußern Sehnen DA, DC, zur mittlern Sehne DB, im andern Fall das Verh. des Unterschiedes der äußern Sehnen zur mittlern Sehne, unveränderlich u. gleich dem Verh. der Sehne des doppelten Bog. zur Sehne des einfachen Bogens.

2) Auch ist im ersten Fall der Unterschied zwischen dem Qdrt. der mittlern Sehne DB, u. dem Rect. der äußern Sehnen DA, DC, im zweiten Fall aber die Summe dieser Flächen, dem Qdrt. der Sehne des einfachen Bogens gleich.

351. Lehrs. 1) Das Rect. zwischen der Sehne eines einfachen Bogens u. ihrer Ergänzungssehne ist gleich dem Rect. zwischen der Sehne des doppelten Bog. u. dem Halbm.

Es sei AC die Sehne des doppelten Bogens, AB die Sehne des einfachen Bogens, BB′ der Durchm., so ist AB′ die Ergänzungssehne zu der Sehne AB demnach $AB \cdot AB' = AC \cdot r$.

2) Das Qdrt. der Sehne des einfachen Bogens ist gleich dem Unterschied oder der Summe des Qdrts. der Sehne des Quadranten, u. des Rect. zwischen dem Halbm. u. der Ergänzungssehne AD des doppelten Bog. AC, je nachdem der einfache Bog. kleiner oder größer als der Quadrant ist; nemlich:

$AB^2 = 2r^2 - r \cdot AD$; $AB'^2 = 2r^2 + r \cdot AD$.

352. Lehrs. Wenn auf dem Umfange eines Kr. vier auf einander folgende gleiche Bog. AB, BC, CD, DE genommen, u. die Sehnen AB des einfachen, AC des zweifachen, AE des vierfachen Bog. gezogen werden, so verh. sich die Sehne des zweifachen zur Sehne des vierfachen Bog., wie das Qdrt. des Halbm. zum Unterschied der Quadrate der Sehnen des Quadranten u. des einfachen Bogens.

I. Bog. AB $<$ Quadrant, also

$$AC : AE = r^2 : (2r^2 - AB).$$

II. Bog. AB $<$ Quadrant, also

$$AC : AE = r^2 : (AB^2 - 2r_2).$$

353. Lehrs. Wenn in einem regl. Polygon aus einer Winkelspitze zu irgend drei aufeinander folgenden gr. Linien gezogen werden:

1) so hat die mittlere zur Summe der beiden äußern ein unveränderliches Verh., welches dem Verh. der Seite zur Diagonale zweier Seiten gleich ist.

2) Der Ueberschuß des Qdrts. der mittlern über das Rect. der beiden äußern ist unveränderlich, u. dem Qdrt. der Seite gleich.

354. Lehrs. 1) Bei zwei Bog. AC, AD, deren Ergänzungen zum Halbkr. BC, BD, zusammen weniger als der Halbkr. betragen, ist das Rect. der Sehnen gleich dem Rect. zwischen dem Halbm. r u. der Summe der Ergänzungssehnen AE, AF, die dem Unterschied u. der Summe der Ergänzungsbogen, BE $=$ BD $-$ BC, BF $=$ BD $+$ BC, zugehören, nemlich:

$$AC \cdot AD = r \cdot (AC + AF).$$

2) Bei zwei Bog. AC, AD, deren Summe kleiner als der Halbkr. ist, ist das Rect. der Sehnen gleich dem Rect. zwischen dem Halbm. r, u. dem Unterschied der Ergänzungssehnen AE, AF, die dem Unterschied und der Summe der Bogen

$BE = AC - AD$, $BF = AC + AD$ zugehören. Nemlich: $AC \cdot AD = r \cdot (AE - AF)$.

355. Lehrs. Wenn man den halben Kreisumfang in eine beliebige ungr. Anzahl gleicher Bogen eintheilt, u. durch je zwei gleichweit vom Durchm. entstehende Theilp. Prllsehnen mit demselben zieht, so ist die Summe aller Abschnitte derselben, welche innerhalb des Winkels liegen, den die Halbm. der mittlern Theilp. bilden, dem Halbm. gleich.

356. Lehrs. 1) Wenn der halbe Kreisumfang in eine beliebige Anzahl gleicher Bogen getheilt wird, u. aus allen Theilp. Prpd. auf den Durchm. errichtet werden, so verh. sich der Durchm. zur dopp. Summe der Prpd., oder der Halbm. zur Summe der Prpd., wie die Sehne eines dieser Theilp. zu seiner Ergänzungssehne.

2) Wenn der halbe Umfang in eine beliebige Anzahl gleicher Bog. getheilt wird, u. aus allen Theilp. Prpd. auf den Durchm. errichtet werden, so ist die Summe aller Prpd. gleich der zweiten Kathete eines rechtw. Tr., in welchem die erste Kathete der Halbm., u. der diesem gegenüberliegenden W. der halbe Mittelpunktswinkel des Theils ist.

357. Lehrs. 1) Wenn ein Bog. AB in eine beliebige grade oder ungrade Anzahl gleicher Bogen getheilt wird, u. aus allen Theilp. nach beliebi-

ger Richtung Parallelsehnen gezogen werden; so verhält sich die durch die Mitte des getheilten Bogens gezogene Parallelsehne zu der Summe aller Prllsehnen, wie die Sehne eines Theils zu der Sehne des um denselben Theil vergrößerten Bogens.

2) Auch ist die Summe aller Prllsehnen der zweiten Seite eines Tr. gleich, in welchem die erste Seite der mittlern Prllsehne, der von ihnen eingeschlossene W. dem halben Mittelpunktswinkel des getheilten Bog., u. der der ersten Seite gegenüber liegende W. dem halben Mittelpunktswinkel eines Theils gleich ist.

358. Lehrs. 1) Wenn ein Bog. CF in eine beliebige Anzahl gleicher Bog. CD, DE, EF getheilt wird, u. aus einem beliebigen Punkt A des Umfangs Sehnen zu den Theilp. AC, AD, AE, AF, gezogen werden, deren Anzahl um 1 größer als die Anzahl der Theile ist, so ist das Rect. zwischen der Summe aller Sehnen, u. der Sehne CP des halben Theils, gleich dem Rect. zwischen der aus A zur Mitte S des eingetheilten Bog. CF gezogenen Sehne AS, u. der Sehne eines Bog. SP, welcher um den halben Theil CP größer als der halbe Bog. CS ist. Nemlich:

$$CP \cdot (AC + AD + AE + AF) = AS \cdot PS.$$

2) Auch ist, wenn man aus den Endp. des getheilten Bog. CF einen halben Theil CP = FU nach entgegengesetzten Richtungen nimmt, u. aus dem dem Punkt A des Diametral entgegengesetzten Punkt B die Ergänzungssehnen BP, BU zieht, das Rect. zwischen der Summe aller Sehnen AC, AD, AE, AF, u. der Sehne DP des halben Theils gleich dem Rect. zwischen dem Halbm. u. dem Unterschiede oder der Summe der Ergänzungssehnen BP, BU, je nachdem der Punkt B außerhalb oder innerhalb des Bog. PU liegt. Nemlich:

$$CP \cdot (AC + AD + AE + AF) = AS \cdot PS = AS \cdot AU = r \cdot (BP \mp BU).$$

359. Lehrs. Wenn der halbe Kreisumfang in eine beliebige Anzahl gleicher Bog. AC, CD, DE, EF, FB getheilt wird, u. aus einem Ende A des Umfangs zu allen Theilp. Sehnen AC, AD, AE, AF, gezogen werden, so ist das Rect. zwischen der um den Halbm. vermehrten Summe dieser Sehnen, u. der Sehne AP des halben Theils, gleich dem Rect. zwischen dem Halbm. u. der Ergänzungssehne BP des halben Theils.

Oder die um den Halbm. vermehrte Summe dieser Sehnen ist gleich der zweiten Kathete MN eines rechtw. Tr. AMN, in welchem die erste Kathete AM der Halbm., u. der diesem gegenüber-

liegenden W. ANM dem halben Mittelpunktsw. des halben Theils gleich ist. Nemlich:

$$AP \cdot (AC + AD + AE + AF + r) = r \cdot BP = AP \cdot MN.$$

360. Lehrs. In jedem regl. Polygon von gr. Seitenzahl, ist das Rect. zwischen der halben Seite, und der Summe der aus einer Winkelspitze zu allen übrigen Winkelsp. gezogenen gr. Linien, gleich dem Rect. zwischen dem Durchm. des umschr. Kr., u. der Summe der Halbm. des umschr. Kr., u. der Summe der Halbm. des umschr. u. eingeschr. Kr.

361. Lehrs. Wenn um ein regl. Polygon von ungr. Seitenzahl ein Kr. beschr., aus einer Winkelsp. A als der ersten, deren Durchm. AP gezogen wird, u. aus dem entgegengesetzten Ende P desselben zur 2ten, 3ten, 4ten u. s. f. Winkelsp. B, C, D, . . . Sehnen gezogen werden, so haben die Summen derselben folgende Relationen:

1) Das Rect. zwischen der Seite des Polygons u. der Summe der 2ten, 4ten, 6ten u. s. f. Sehne, ist gleich dem Rect. zwischen dem Halbm. u. der größten Diag. des Polygons.

2) Das Rect. zwischen der Seite des Polygons u. der Summe der 3ten, 5ten, 7ten u. s. f. Sehne, ist gleich dem Rect. zwischen dem Halbm. u. dem Ueberschuß der größten Diag. über die Seite des Polygons.

3) Der Ueberschuß der Summe der 2ten, 4ten, 6ten u. s. f. Sehne, über die Summe der 3ten, 5ten, 7ten u. s. f. Sehne ist dem Halbm. gleich.

4) Das Rect. zwischen der kleinsten Sehne u. der der Summe aller Sehnen in einerlei Halbkr., den Durchm. nicht mitgerechnet, ist gleich dem Rect. zwischen dem Halbm. u. dem Ueberschuß des Durchm. über die kleinste Sehne.

5) Das Rect. zwischen der kleinsten Sehne u. der Summe aller Sehnen zu allen Winkelsp. des Polygons, ist dem Qdrt. des Durchm. gleich.

6) Das Rect. zwischen der kleinsten Sehne u. der Summe mehrerer auf einander folgenden Sehnen von der kleinsten angefangen, ist dem Qdrt. der mittlern Sehne des zwischen den beiden äußersten Winkelsp. enthaltenen Bog. gleich.

362. Lehrs. 1) In einem regl. Polygon von gr. Seitenzahl ist die Summe der Qdrte. je zweier Linien, die aus einer Winkelsp. der halbirenden Diag. zu den gleich weit von derselben auf einerlei Seite liegenden Winkelspitze gezogen werden, dem Qdrt. der halbirenden Diag. gleich.

2) Auch verh. sich die Summe der Qdrte. der aus einer Winkelsp. zu allen übrigen Winkelsp. gezogenen Linien zum Qdrt. der halbirenden Diag., wie die halbe Winkelzahl zu 1.

363. Lehrs. 1) Wenn um ein regl. Polygon von

ungr. Seitenzahl ein Kr. beschr. wird, so verh. sich die Summe der Odrte. der aus einer Winkelsp. zu allen übrigen Winkelsp. in demselben Halbkr. gezogenen Linien, zum Odrt. des Halbm., wie die Winkelzahl zu 1.

2) Wenn durch eine Winkelsp. ein Durchm. gezogen wird, so verh. sich die Summe der Odrte. der Sehnen, welche aus dem entgegengesetzten Ende des Durchm. zu allen übrigen Winkelsp. in demselben Halbkr. gezogen werden, zum Odrt. des Halbm., wie die um 2 verminderte Winkelz. zu 1.

3) Die Summe der Odrte. der aus diesem Ende des Durchm. zu allen Winkelsp. des Polygons gezogenen Sehnen, verh. sich zum Odrt. des Halbm. wie die doppelte Winkelzahl zu 1.

364. Lehrs. 1) Wenn in den Kr. ein gleichseitiger Tr. beschr. wird, so ist das Odrt. der Seite dem 3fachen Odrt. des Halbm. gleich.

2) Wenn die Spitzen zweier regl. eingeschr. Tr. ABC, DEF, einander diametral entgegengesetzt werden, so theilen die Seiten des einen die des andern in drei gleiche Theile.

3) Wenn aus einem beliebigen Punkt P des Umfangs, zu den Winkelsp. des eingeschr. regl. Tr. ABC, Sehnen PA, PB, PC, gezogen werden, so finden folgende Relationen Statt, wenn PA die mittlere ist, PB, PC, die äußern Sehnen sind:

$PA = PB + PC.$

$PB^2 + PC^2 + PB.PC = PA^2 + PB^2 - PA.PB$
$= PA^2 + PC^2 - PA.PC = AB^2$
$= PA^2 + PB^2 + PC^2 = 2AB^2.$

4) Wenn aus den beiden Enden der Seite des eingeschr. gleichseitigen Tr. zwei beliebige Prllsehnen BQ, CP, gezogen werden, so ist ihr Unterschied ihrer Zwischensehne BP oder CQ gleich.

365. Lehrs. 1) Wenn in dem Kr. ein Qdrt. beschrieben wird, so ist das Qdrt. der Seite dem 2fachen Qdrt. des Halbm. gleich.

2) Wenn aus einem beliebigen Punkt P des Umfangs zu den Winkelsp. des eingeschr. Qdrts. ABCD, Sehnen PA, PB, PC, PD, gezogen werden, so haben sie folgende Relationen zu einander:

$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2 = 2AB^2$
$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4AB^2$
$PA^2 - PB.PD = PB^2 + PA.PC = PC^2 + PB.PD$
$= PD^2 - PA.PC = AB^2$
$PA : (PB + PD) = PB : (PA - PC)$
$= PC : (PD - PB) = PD : (PA + PC)$
$= AB : AC.$

366. Lehrs. Wenn in dem Kreis ein regl. Fünfseit u. Zehnseit beschr. worden, so finden folgende Relationen Statt:

1) Die Seite u. Diag. des Fünfseits, AB, AC, bilden mit einander zwei gleichschenklige Tr.

ACD, BCA, in deren einen ACD jeder W. an der Grdl. ACD, ADC, das Doppelte des innern W. CAD an der Spitze ist; u. in deren anderen ABC jeder W. unter der Grdl. AC das Doppelte des Außenwinkels an der Spitze B ist.

2) Im Zehnseit ist der Ueberschuß der Diag. PB über die Seite PC dem Halbm. gleich, u. das Rect. derselben ist dem Qdrt. des Halbm. gleich.

3) Im Fünfseit ist das Qdrt. der Seite AB, gleich der Summe der Qdrte. des Halbm. u. der Seite PC des Zehnseits. Eben so ist das Qdrt. der Diag. AC des Fünfseits gleich der Summe der Qdrte. des Halbm. u. der Diag. PB des Zehnseits.

4) Im Fünfseit ist die Summe der Qdrte. der Seite u. Diag. dem 5fachen Qdrt des Halbm. gleich.

5) Wenn das Rect. der Seite u. Diag. des Fünfseits in ein gleiches verwandelt wird, dessen eine Seite der Halbm. ist, so ist das Qdrt. der andern Seite dem 5fachen Qdrt. des Halbm. gleich.

6) Wenn der Halbm. MA in K innerhalb u. L außerhalb in stettig-geom. Proportion getheilt wird, so ist MK die Seite u. ML die Diag. des Zehnseits. Und wenn aus der Spitze des prd. Halbm. MG die Graden GK, GL, zu den Theilp.

gezogen werden, so ist GK die Seite u. GL die Diag. des Fünfseits.

367. Lehrs. Wenn in den Kr. ein Funfzehnseit beschrieben wird, so finden folgende Relationen Statt:

1) Unmittelbar gegeben sind: die Sehne des 3fachen Bogens als die Seite des Fünfseits; die Sehne des 5fachen Bogens als die Seite des Dreiseits; die Sehne des 6fachen Bogens, als die Diag. des Fünfseits.

2) Der einfache Bogen des Funfzehnseits ist gleich dem Unterschied der Bogen des Sechsseits und Zehnseits; der doppelte Bog. ist gleich dem Unterschied. der Bog. des Dreiseits u. Fünfseits; der halbe Bogen ist gleich dem Unterschied. der Bogen des Fünfseits u. Sechsseits.

3) Der Unterschied. der Ergänzungssehnen, des 1fachen u. 4fachen Bog. ist der Seite des Zehnseits gleich.

Die Summe der Sehnen des 1fachen u. 4fachen Bog. ist der Diag. des Fünfseits gleich.

Der Unterschied. der Ergänzungssehnen des 2fachen u. 7fachen Bog. ist der Diag. des Zehnseits gleich.

Der Unterschied. der Sehnen des 2fachen u. 7fachen Bog. ist der Seite des Fünfseits gleich.

4) Das Rect. der Ergänzungssehnen des 1fachen u. 4fachen Bog. ist gleich dem Rect. zwischen dem

Halbm., u. der Summe des Halbm. u. der Diag. des Zehnseits.

Das Rect. der Sehnen des 1fachen u. 4fachen Bog. ist gleich dem Rect. zwischen dem Halbm. u. der Seite des Zehnseits.

Das Rect. der Ergänzungssehnen, des 2fachen u. 7fachen Bog. ist gleich dem Rect. zwischen dem Halbm. u. dem Ueberschuß desselben über die Seite des Zehnseits.

Das Rect. der Sehnen des 2fachen u. 7fachen Bog. ist gleich dem Rect. zwischen dem Halbm. u. der Diag. des Zehnseits.

5) Die Summe der Qdrte. der Sehnen des 1fachen u. 4fachen Bog. ist gleich der Summe der Qdrte. des Halbm. u. der Seite des Fünfseits.

Die Summe der Qdrte. der Sehnen des 2fachen u. 7fachen Bog. ist gleich der Summe der Qdrte. des Halbm. u. der Diag. des Fünfseits.

Die Summe der Qdrte. der 4 Sehnen des 1fachen, 2fachen, 4fachen u. 7fachen Bog. ist gleich dem 7fachen Qdrt. des Halbm.

Die Summe der Qdrte. aller 7 Sehnen im Halbkr. ist gleich dem 15fachen Qdrt. des Halbm.

Die Sätze 3) u. 4) geben ein leichtes Mittel, die Sehnen oder Ergänzungssehnen des 1fachen u. 4fachen, des 2fachen u. 7fachen Bog.,

jede besonders, durch Anwendung von was für Aufg. zu finden.

368. Lehrs. Wenn in den Kr. ein regl. Siebzehnseit beschrieben wird, so finden folgende Relationen Statt:

1) Die Ergänzungssehne des 8fachen Bog., oder die Seite des 34Seits, bildet als Grdl. mit dem Halbm. einen gleichschenkligen Tr., in welchem das 8fache des W. an der Spitze jedem W. an der Grdl. gleich ist.

Die Ergänzungss. des 2fachen Bog. bildet als Grdl. mit dem Halbm. ein gleichsch. Tr., in welchem das 8fache des W. an der Spitze, um 12 rechte vermindert, jedem W. an der Grdl. gleich ist.

2) Die Summe der Odrte. der aus einer Winkelspitze an die 8 übrigen in demselben Halbkr. gezogenen Sehnen ist dem 17fachen Odrt. des Halbm. gleich.

Die Summe der Odrte. der 8 Ergänzungssehnen der genannten ist dem 15fachen Odrt. des Halbm. gleich.

3) Der Ueberschuß der Summe der Ergänzungssehnen des 1-, 3-, 5- u. 7fachen Bog., über die Summe der Ergänzungssehnen des 2-, 4-, 6- u. 8fachen Bog., ist dem Halbm. gleich.

Oder wenn von dem Ueberschuß der Summe

der Ergänzungssehnen des 3- u. 5fachen Bog. über den Unterschied der Ergänzungss. des 6- u. 7fachen Bog., der Ueberschuß der Summe der Ergänzungss. des 2- u. 8fachen Bog. über den Unterschied der Ergänzungss. des 1- u. 4fachen Bog. weggenommen wird, so bleibt der Halbm. übrig.

4) Der Ueberschuß der Summe der Rect. der Ergänzungss. des 3-, 2fachen, u. des 5-, 8fachen Bog. über die Summe der Rect. der Ergänzungss. des 7-, 1fachen, u. des 6-, 4fachen Bog., ist dem Qdrt. des Halbm. gleich.

5) Der Ueberschuß der Summe der Rect. der Ergänzungss. des 7-, 2fachen, u. 3-, 4fachen Bog., über die Summe der Rect. der Ergänzungss. des 5-, 1fachen u. des 6-, 8fachen Bog., ist dem Qdrt. des Halbm. gleich.

6) Die Summe der Rect. der Ergänzungss. des 5-, 2fachen, des 6-, 1fachen, des 3-, 8fachen, u. des 7-, 4fachen Bog. ist gleich dem Rect. zwischen dem Durchm. u. dem Ueberschuß der Summe der Ergänzungss. des 3-, u. 5fachen Bog. über den Unterschied der Ergänzungss. des 6-, u. 7fachen Bogens.

7) Der Ueberschuß der Summe der Rect. der Ergänzungss. des 6-, 2fachen, u. des 3-, 1fachen Bog., über die Summe der Rect. der Ergän-

zungss. des 7=, 8fachen u. des 4=, 5fachen Bog., ist gleich dem Rect. zwischen dem Durchm., u. dem Ueberschuß der Summe der Ergänzungs. des 2=, u. 8fachen Bog., über den Unterschied der Ergänzungss. des 1= u. 4fachen Bogens.

8) Das Rect., dessen eine Seite N der Ueberschuß der Summe der Ergänzungss. des 3= u. 5fachen Bog. über den Unterschied der Ergänzungss. des 6= u. 7fachen Bog. ist; u. dessen andere Seite P der Ueberschuß der Summe der Ergänzungss. des 2= u. 8fachen Bog. über den Unterschied der Ergänzungss. des 1= u. 4fachen Bog. ist, ist dem Qdrt. des Durchm. gleich.

Da also $N - P = r$ u. $N \cdot P = 4r^2$ ist, so sind die Sehnenunterschiede N u. P gegeben.

9) Das Rect. zwischen der Summe der Ergänzungssehnen des 3= u. 5fachen Bog. u. dem Unterschied der Ergänzungssehne des 6= u. 7fachen Bog., ist dem Qdrt. des Halbm. gleich.

Hierdurch ist die Summe der Ergänzungssehnen des 3= u. 5fachen Bogens, so wie der Unterschied der Ergänzungssehnen des 6= u. 7fachen Bog. gegeben.

10) Das Rect. zwischen der Summe der Ergänzungss. des 2= u. 8fachen Bog., u. dem Unterschiede der

Ergänzungsf. des 1- u. 4fachen Bog., ist dem Qdrt. des Halbm. gleich.

Hierdurch ist die Summe der Ergänzungsf. des 2- u. 8fachen Bog., so wie der Unterschied der Ergänzungssehnen des 1- u. 4fachen Bog. gegeben.

11) Das Rect. der Ergänzungsf. des 3- u. 5fachen Bog. ist gleich dem Rect. zwischen dem Halbm. u. der Summe der Ergänzungsf. des 2- u. 8fachen Bogens.

Das Rect. der Ergänzungsf. des 6- u. 7fachen Bog. ist gleich dem Rect. zwischen dem Halbm. u. dem Unterschiede der Ergänzungsf. des 1- u. 4fachen Bogens.

Das Rect. der Ergänzungssehnen des 2- u. 8fachen Bog. ist gleich dem Rect. zwischen dem Halbm. u. dem Unterschiede der Ergänzungssehnen des 6- u. 7fachen Bogens.

Das Rect. der Ergänzungssehnen des 1- u. 4fachen Bog. ist gleich dem Rect. zwischen dem Halbm. u. der Summe der Ergänzungsf. des 3- u. 5fachen Bogens.

Hierdurch sind alle 8 Ergänzungssehnen des regl. Siebzehnseits gegeben.

369. Aufg. In einem gegebenen Kr. ein regl. Siebzehnseit zu beschreiben.

Aufl.

Aufl. 1) Zuerst sucht man N u. P (aus 368. 8.)

2) Die Summen u. Unterschiede, welche N u. P geben (368. 8.)

3) Dann die Ergänzungssehne des 8fachen Bogens, oder die Seite des 34seits, oder die Ergänzungssehne des 2fachen Bogens.

4) Halbirt man den gefundenen 2fachen Bogen, so ergiebt sich die Seite des regl. Siebzehnseits.

Vermischte Aufgaben.

370. Aufg. Aus einer gegebenen Kathete soll man einen rechtw. Tr. zeichnen, so daß ein Prpd. aus der Spitze des rechten W. auf der Hypotenuse ein Stück von gegebener Länge abschneidet.

371. Aufg. Auf einer Graden AB oder ihrer Verlängerung einen Punkt C so zu bestimmen, daß der Unterschied der über die Abschnitte AC, BC, beschriebenen Qdrten. dem Unterschied der über zwei gegebene BE, AD, beschr. Qdrten. gleich sei.

272. Aufg. Auf einer Graden AB oder ihrer Verlängerung einen Punkt C so zu bestimmen, daß die Summe der über die Abschnitte AC, BC, beschr. Qdrtn. dem Qdrt. einer gegebenen DE gleich sei.

373. Aufg. Die anliegenden Seiten eines Rect. AEFC zu finden, aus der Fläche desselben, welche einem über BD beschr. Qdrt. gleich sein soll, u. aus dem Unterschied AB der Seiten.

Oder auf der Verlängerung einer Graden AB, den Punkt C so zu bestimmen, daß das Rect. der Abstände AC, BC, dem über BD beschr. Qdrt. gleich sei.

374. Aufg. Die anliegenden Seiten eines Rect. AEFC zu finden, aus der Fläche desselben, welche einem über BD beschr. Qdrt. gleich sein soll, u. aus der Summe AB der Seiten.

Oder: eines Rect. Seiten aus dessen Umfang $= 2AB$ u. Fläche $= BD^2$ zu bestimmen.

Oder: auf einer Graden AB den Punkt C so zu bestimmen, daß das Rect. der Abstände AC, BC, dem über BD beschr. Qdrt. gleich sei.

Welches ist die Bedingung der Möglichkeit?

375. Aufg. Ueber eine Grade AB als Hypotenuse ein rechtw. Tr. ABC zu zeichnen, in welchem sowohl die Hypotenuse, größere u. kleinere Kathete AB, AC, BC, als auch die größere Kathete, kleinere Kathete und Höhe, AC, BC, CD, in stetiger geom. Proportion stehen.

376. Aufg. Durch einen innerhalb eines W. ABC gegebenen Punkt M eine Grade AMC so zu ziehen, daß sie zwischen den Schenkeln ein Tr. ABC von kleinster Fläche abschneidet.

377. Aufg. Innerhalb eines Tr. ist ein Punkt gegeben, man soll durch denselben eine Grade ziehen, welche einen kleinsten Tr. abschneidet.

378. Aufg. Innerhalb eines Tr. einen Punkt so zu bestimmen, daß durch denselben drei Grade Linien gezogen werden können, welche drei gleiche kleinste Tr. in den Winkeln abschneiden.

379. Aufg. Innerhalb eines W. ist ein Punkt gegeben; man soll durch denselben zwei Grade so ziehen, daß sie zwischen den Schenkeln Tr. abschneiden, welche einander und einem gegebenen Prllgrm. gleich sind, in dessen Seite der gegebene Punkt liegt.

Welches ist die Bedingung der Möglichkeit?

380. Aufg. Ein Tr. in zwei gleiche Theile zu theilen, durch eine Grade, welche durch einen innerhalb gegebenen Punkt geht.

381. Aufg. Außerhalb eines W. u. seines Scheitelw. ist ein Punkt gegeben; man soll aus demselben zwei Grade so ziehen, daß sie zwischen den Schenkeln Tr. abschneiden, welche einander und einem gegebenen Prllgrme. gleich seien, in dessen verlängerter Seite der gegebene Punkt liegt.

382. Aufg. In der Verlängerung einer Seite eines Tr. ist ein Punkt gegeben, man soll aus demselben den Tr. in zwei oder mehrere gleiche Theile theilen.

383. Aufg. Ein Tr. in mehrere gleiche Theile zu theilen, aus einem außerhalb beliebig gegebenen Punkt.

384. Aufg. Man soll in einem rechtw. Tr. zwischen den Schenkeln des rechten W., zwei Grade so legen, daß sie von der Hypotenuse halbirt werden, u. einer gegebenen Linie gleich seien.

385. Aufg. In der Graden BD, welche einen rech-

ten W. B halbirt, ist ein Punkt D gegeben; man soll durch oder aus demselben zwischen die Seiten des rechten W. innerhalb oder außerhalb zwei Grade so legen, daß sie einer gegebenen Linie gleich seien.

386. Aufg. Ein Tr. durch eine Grade so zu theilen, daß die beiden Theile gleichen Umfang u. gleichen Inhalt haben.

387. Aufg. Ein Vierseit durch eine Grade so zu theilen, daß die beiden Theile gleichen Umfang u. gleichen Inhalt haben.

388. Aufg. Auf einer Graden sind drei aufeinander folgende Punkte A, B, C, gegeben, man soll darauf zwei Punkte D so bestimmen, daß das Verh. der Flächen $AB.AD : BD^2$ ein gegebenes sei, nemlich gleich dem Verh. $AB : 2BC$.

389. Aufg. Auf einer Graden sind drei aufeinander folgende Punkte A, B, C, gegeben, man soll darauf zwei Punkte D so bestimmen, daß das Verh. der Flächen $AB \cdot BD : AD^2$ ein gegebenes sei, nemlich gleich dem Verh. $AB : 2AC$.

Welches ist die Bedingung der Möglichkeit?

390. Aufg. Auf einer Graden AB die beiden Punkte C so zu bestimmen, daß das Verh. der Qdrte. der Abstände $AC^2 : BC^2$ ein gegebenes sei, nemlich gleich dem Verhältniß AD : BE.

391. Aufg. Auf zwei Prllen., welche von einer

Graden AB geschnitten werden, sind die Punkte C, D, also auch die Tr. ABC, ABD, gegeben; man soll diese Prllen. durch eine zweite Grade FG, so schneiden (welche die erste AB in E trifft), daß der Tr. AFE dem ABC, u. der Tr. BGE dem ABD gleich sei, oder daß die Verbindungslinien CE, BF u. DE, AG einander parallel seien.

392. Aufg. In einem Trapez. ABCD sind die schiefen Seiten AB, CD durch eine Grade OP geschnitten; man soll die Prllseiten AD, BC, durch eine zweite Grade FG, welche jene in E trifft, so schneiden, daß die Theile AOEF einem gegebenen Tr. IKL, u. BOEG einem gegebenen Tr. BOM gleich seien.

393. Aufg. Auf den Seiten AB, AC eines Tr. ABC sind die Punkte G, H, gegeben; man soll durch eine Grade DEF, die Seiten in D, F, u. die Grdl. in E so schneiden, daß die Tr. zwischen der Grdl. u. den Seiten eine gegebene Fläche haben, nemlich $\triangle BED = BCG$, u. $\triangle CEF = CBH$ sei, oder daß die Verbindungslinien CD, BF gegenseitig prllel. seien den Verbindungslinien EG, EH.

394. Aufg. In einem Vierseit ABCD sind zwei gegenüberliegende Seiten AB, CD, durch eine Grade OP geschnitten; man soll die beiden andern gegenüberliegenden Seiten BC, AD durch eine zweite Grade FG so schneiden, daß die Theile AOEF

einem gegebenen Tr. KIL u. BOEG einem gegebenen Tr. HMN, gleich seien.

395. Aufg. Eine Linie AG wird durch BC in C geschnitten, man soll auf BC ein Punkt X so bestimmen, daß GX zu GA in einem gegebenen Verh. sei.

396. Aufg. Auf der Grdl. AG eines gegebenen Tr. ABG ist ein Punkt C gegeben, man soll zu der Grdl. eine Linie DF prllel. ziehen, so daß wenn man FC zieht, alsdann DF zu FC in einem gegebenen Verh. sei.

397. Aufg. In dem Tr. ABC eine Grade DE zu ziehen, so daß die beiden nicht unter sich anliegende Abschnitte DB u. EC u. die Linie DE in einem gegebenen Verh. seien.

398. Aufg. Aus zwei den W. A einschließenden Seiten, u. der Halbirungslinie AD des W. A, den Tr. ABC zu zeichnen.

399. Aufg. Um das Vierseit ABCD ein Vierseit a′ b′ c′ d′ ähnl. dem Vierseit abcd zu beschreiben. Diese Aufg. ist 8 Aufl. fähig.

400. Aufg. Einen Kr. zu zeichnen, der durch zwei gegebene Punkte geht, u. über eine gegebene Grade ein Kreissegment von gegebenen W. abschneidet.

Aufgaben und Lehrsätze
zum vierten Abschnitt.

401. Lehrs. Jede Ebene perpendikulär auf eine Prlle. zu einer Ebene ist auch prd. auf diese Ebene.

402. Lehrs. Wenn durch zwei Prllen. zwei Ebenen prd. auf einer dritten gelegt werden, so sind diese Ebenen prllel.

403. Lehrs. Zwei Ebenen, die respective auf zwei Prlten. prd. sind, sind prllel.

404. Lehrs. Zwei Ebenen prd. auf zwei nicht prlle. Linien, sind nicht prllel.; u. liegen die graden Linien in einer dritten Ebene, so ist die Schnittlinie der beiden ersten Ebenen prd. auf diese dritte.

405. Lehrs. Wenn eine Ebene u. eine gerade Linie auf einer Ebene prd. stehen, so sind die Ebene u. die gerade Linie prllel.

406. Lehrs. Eine gerade Linie ist auf eine Ebene prd., wenn sie mit drei durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogene gerade Linien gleiche Winkel macht.

407. Lehrs. Jede gr. Linie, die prllel. zu zwei sich schneidende Ebenen ist, ist es auch mit ihrer Schnittlinie.

Dieser Satz gilt auch umgekehrt.

408. Lehrs. Wenn sich vier Ebenen zu zwei u. zwei schneiden, so daß die gegenüberliegenden prllel. sind, 1) so sind die 4 Schnittlinien prllel.; 2) die gegenüberliegenden Flächenw. sind gleich; 3) die 4 Flächenw. betragen zusammen 4 Rechteflächenwinkel.

409. Lehrs. Die durch eine beliebige gerade Linie mit prllen. Ebenen gebildete W., sind gleich.

410. Lehrs. Jede zu einem Prd. auf einer Ebene prlle. Ebene, ist auf jene Ebene perpendiculär. Umgekehrt: wenn zwei Ebenen winkelrecht aufeinander stehen, so ist jeder Prpd. auf der einen zu der andern prllel.

411. Lehrs. Haben die Ebenen eine gemeinschaftliche Schnittlinie, so theilen sie die ihnen schneidenden geraden Prllen. proportional.

412. Lehrs. Wenn man im Mittelp. der Prph. die durch drei gegebenen Punkte geht, einen Prpd. auf die Ebene dieser 3 Punkte errichtet; so ist 1) jeder Punkt dieses Prpdkels von diesen 3 gegebenen Punkten gleich weit entfernt; 2) jeder außerhalb dieses Prpdkels genommene Punkt liegt

ungleich weit von diesen nemlichen 3 Punkten entfernt.

413. Lehrs. Halbirt eine Ebene einen Flächenw., so ist 1) jeder Punkt in dieser Ebene von den Ebenen des Flächenw. gleich weit entfernt; 2) jeder Punkt außerhalb der Halbirungsebene ist von denselben Ebenen ungleich weit entfernt.

414. Lehrs. Wenn eine Ebene eine gerade Linie winkelrecht halbirt, so ist 1) jeder Punkt in dieser Ebene von den Endp. dieser Linie gleich weit entfernt; 2) jeder Punkt außerhalb dieser Ebene ist von denselben Endp. ungleich weit entfernt. Umgekehrt ist die Ebene dreier gleich weit von den Endp. einer gr. L. entfernten Punkte, auf dieser Linie prd. u. geht durch ihre Mitte.

415. Aufg. In einem in einer Linie gegebenen Punkt, eine prp. Ebene auf dieser Linie zu errichten.

416. Aufg. Aus einem außerhalb einer Linie gegebenen Punkt eine prd. Ebene auf diese Linie zu fällen.

417. Aufg. Den W. anzugeben, den zwei im Raume sich nicht schneidende Linien bilden.

418. Lehrs. Wenn aus einem gegebenen Punkt mehrere nach einer Ebene gezogene gr. Linien gegen diese Ebene gleich geneigt sind, so liegen ihre Durchschnittsp. mit der Ebene in einer Kreisperipherie, deren Mittelp. der Fuß des aus dem gegebenen Punkt auf die Ebene gefällte Prd. ist.

419. Lehrs. Wenn aus einerlei Punkte eines Prpd. mehrere auf einer Ebene gezogene Linien mit dem Prpd, gleiche W. machen, so liegen ihre Schnittp. mit der Ebene in einer Kreisperipherie, deren Mittelp. der Fuß des Prpd. ist.

420. Lehrs. Wenn aus einerlei Punkt einer geraden Linie a mehrere gr. Linien gezogen mit a gleiche W. bilden, so liegen die Endp. von diesen gleichen Linien in einer Krphr., deren Ebene auf a prd. ist.

421. Lehrs. Zwei Ebenen schneiden sich immer, wenn sie respective auf zwei nicht parallele Linien prd. sind.

422. Lehrs. Alle Prpd. aus verschiedenen Punkten eine gr. Linie, auf einer gegebenen Ebene, liegen in einer auf der gegebenen prd. Ebene.

423. Lehrs. Ist eine gerade Linie mit einer Ebene parallel, so schneiden alle durch diese Linien gelegte Ebenen die erste Ebene, mit dieser Linie parallel.

424. Lehrs. Jede Prlle. mit einer in einer Ebene liegenden Linie, ist zu dieser Ebene parallel.

425. Lehrs. Sind zwei Linien prll., so ist die durch die eine von ihnen gelegte Ebene mit der andern Linie parallel.

426. Lehrs. Sind zwei gerade Linien zu einer dritten prll., so ist die Ebene dieser zwei Graden prll. mit der dritten.

427. Lehrs. Wenn zwei sich schneidende Linien par-

allel zu einer gegebenen Ebene sind, so ist die Ebene dieser zwei Graden parallel zu der gegebenen Ebene.

428. Lehrs. Wenn eine Grade schief auf eine Ebene stehet, so kann durch ihr auf die Ebene nur eine einzige prd. Ebene gelegt werden.

429. Lehrs. Wenn eine Grade mit einer Ebene parallel, u. eine andere Grade nicht mit dieser Ebene parallel ist; so muß jede auf die erste Linie prd. Ebene die zweite Linie schneiden.

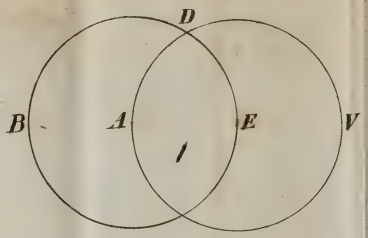
430. Lehrs. Zwei respective auf zwei sich schneidende Linien prd. Ebenen schneiden sich immer, u. ihre Schnittlinie ist auf die Ebene der zwei Linien prd.

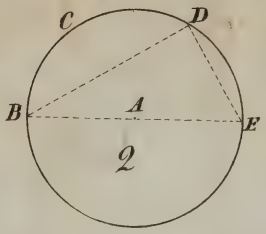
431. Lehrs. Zwei beliebig im Raume liegende Linien werden durch irgend drei parallele Ebenen proportionirt geschnitten.

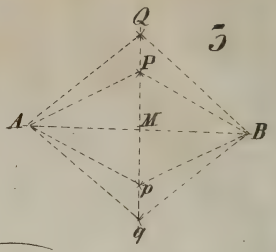
Druckfehler.

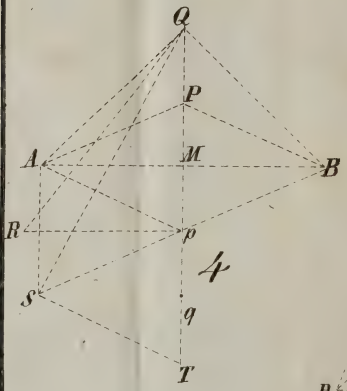
Seite 300 lies 400.
" 422 4te Aufg. lies obige.
" 446 11te Aufg. 2te Zeile lies hohle statt halbe.

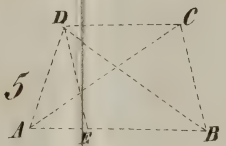
LIBRARY
OF THE

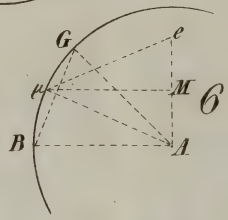

D
B
A
E
V
1

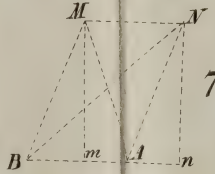

C
D
B
A
E
2

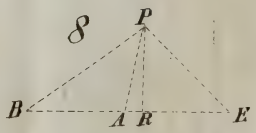

Q
P
A
M
B
p
q
3

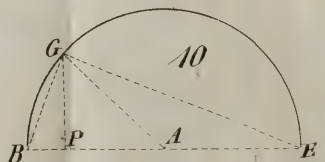

Q
P
A
M
B
R
p
S
q
T
4

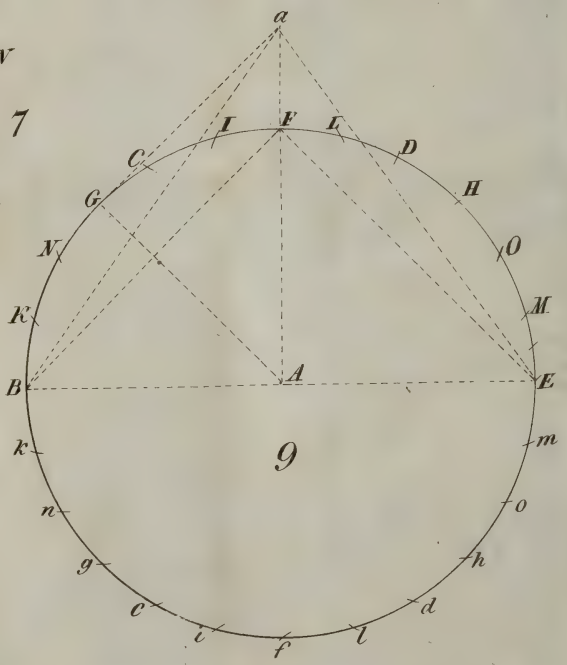

D
C
5
A
E
B


G
e
M
B
A
6

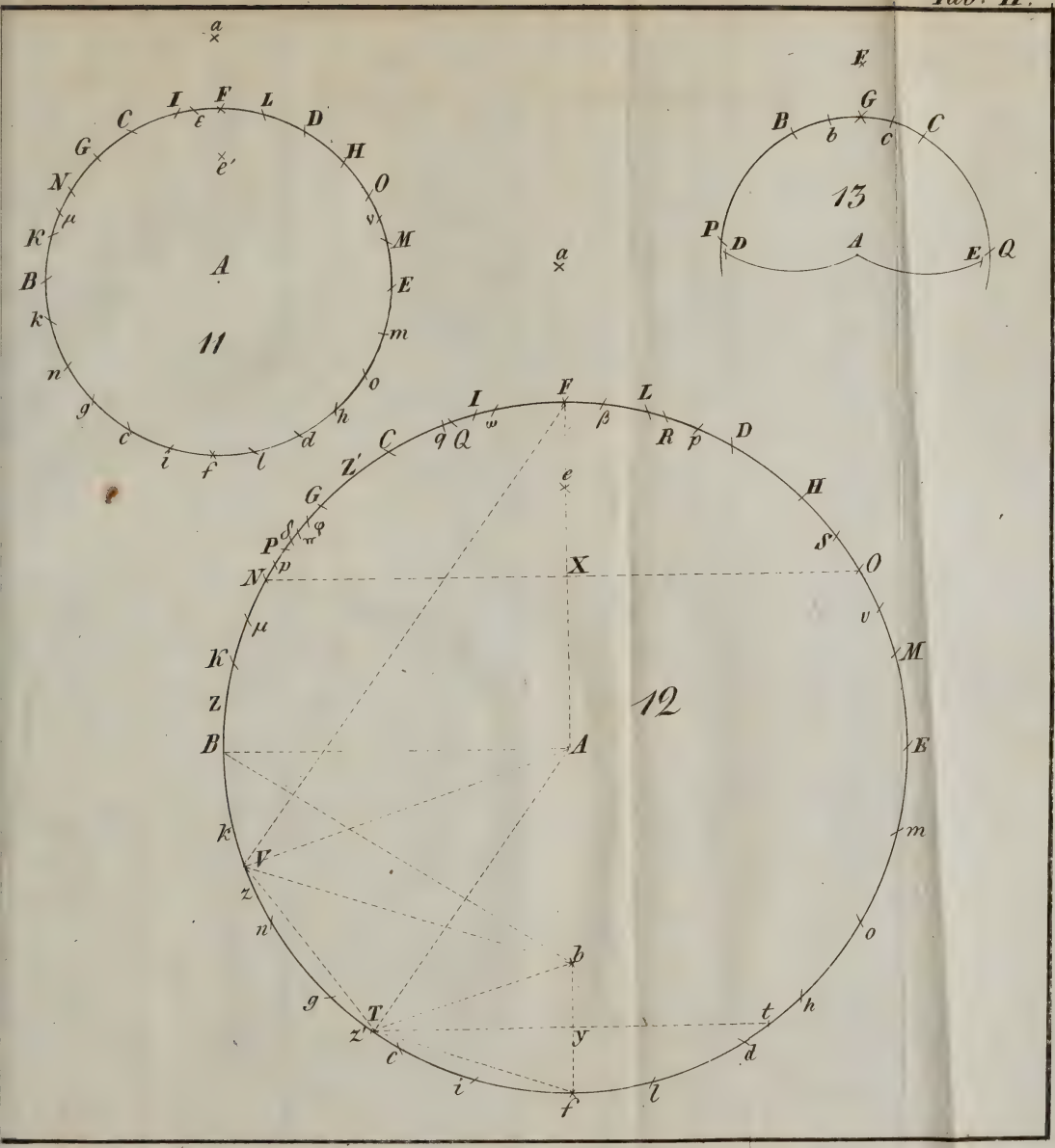

M
N
B
m
A
n
7

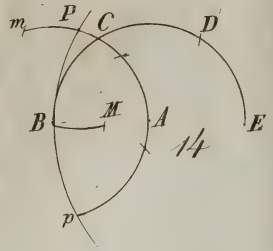

8
P
B
A
R
E


10
G
B
P
A
E

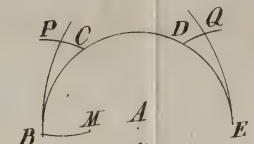

a
I
F
L
D
C
H
G
N
O
K
M
B
A
E
9
k
m
n
o
g
h
c
d
i
f
l

F. Jättnig sc.

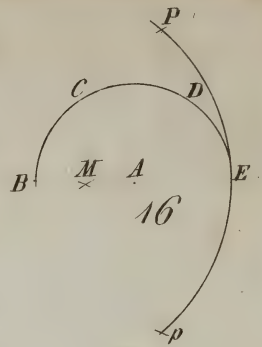

11
12
13
A
B
C
D
E
F
G
H
I
K
L
M
N
O
P
Q
R
S
T
X
Y
Z
Z'
a
b
c
d
e
e'
f
g
h
i
k
l
m
n
o
p
q
r
s
t
v
w
x
y
z
z'
α
β
γ
δ
ε
φ
μ
ν
ω



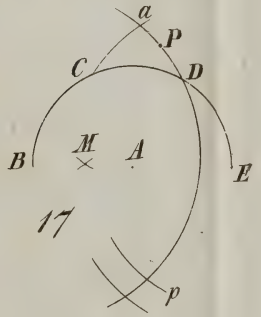
14



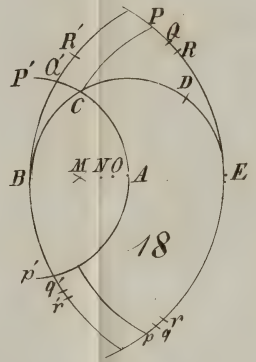
15



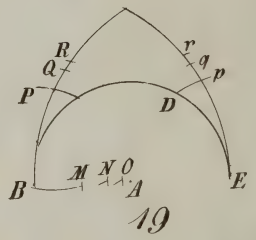
16



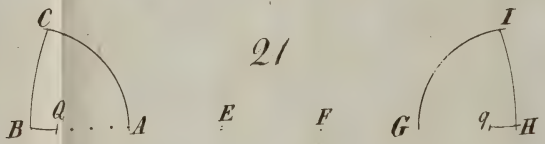
17

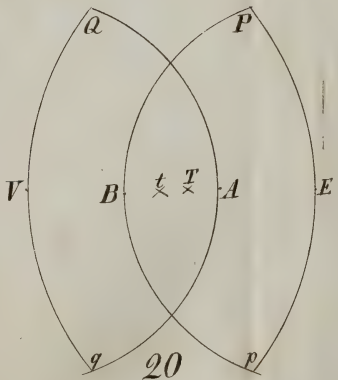


18

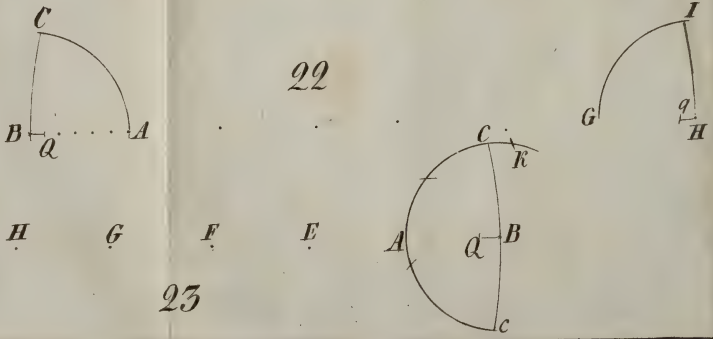


19

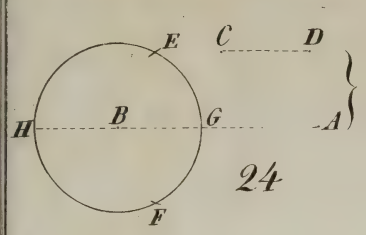




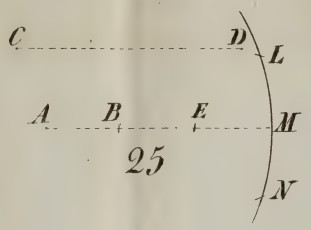
20



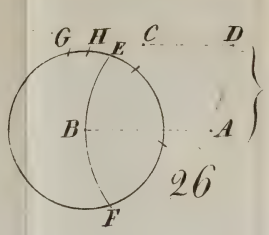
23



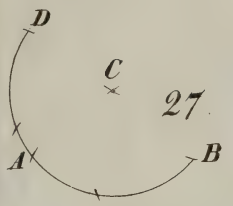
24



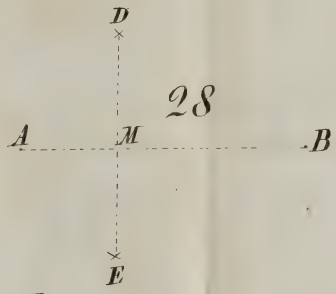
25



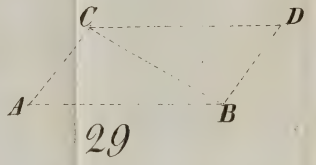
26



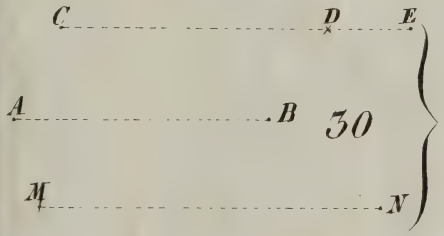
27



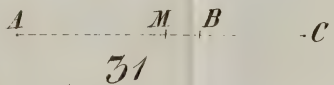
28



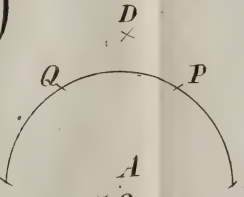
29



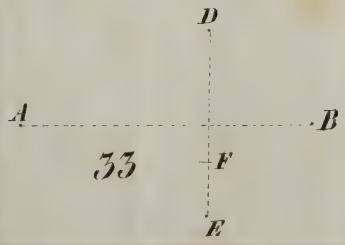
30



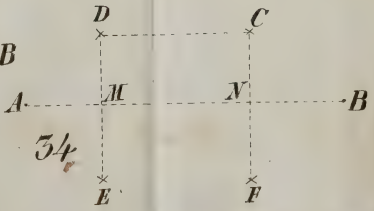
31



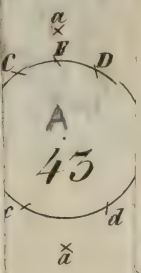
32

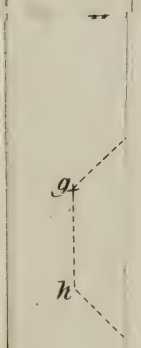


33

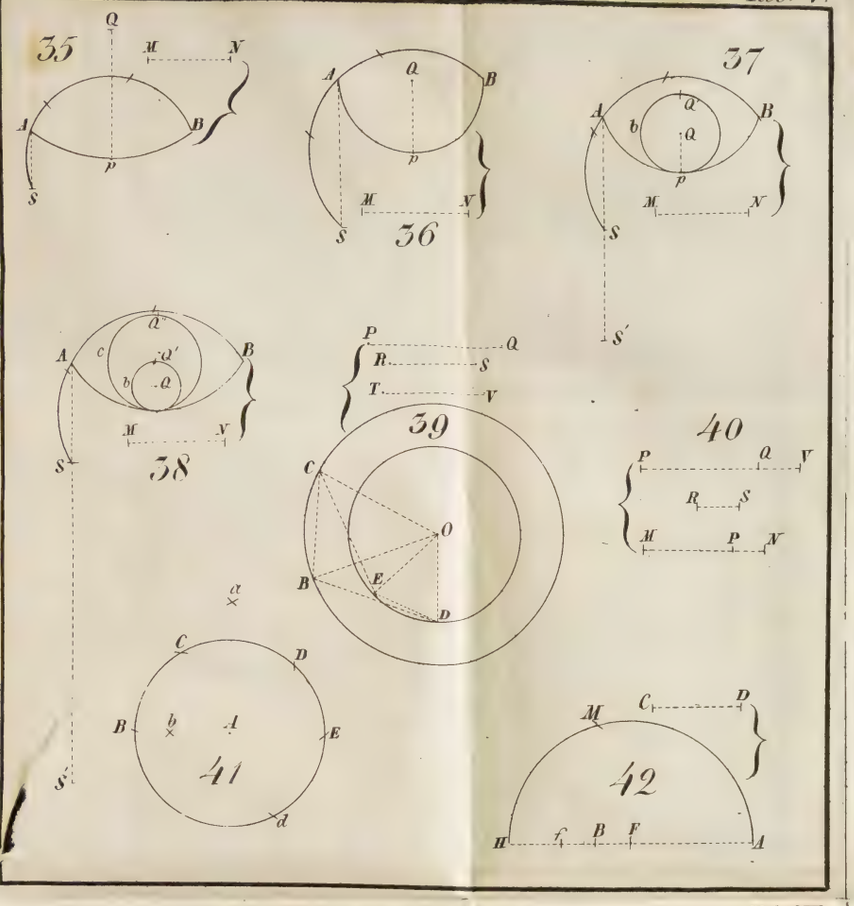


34

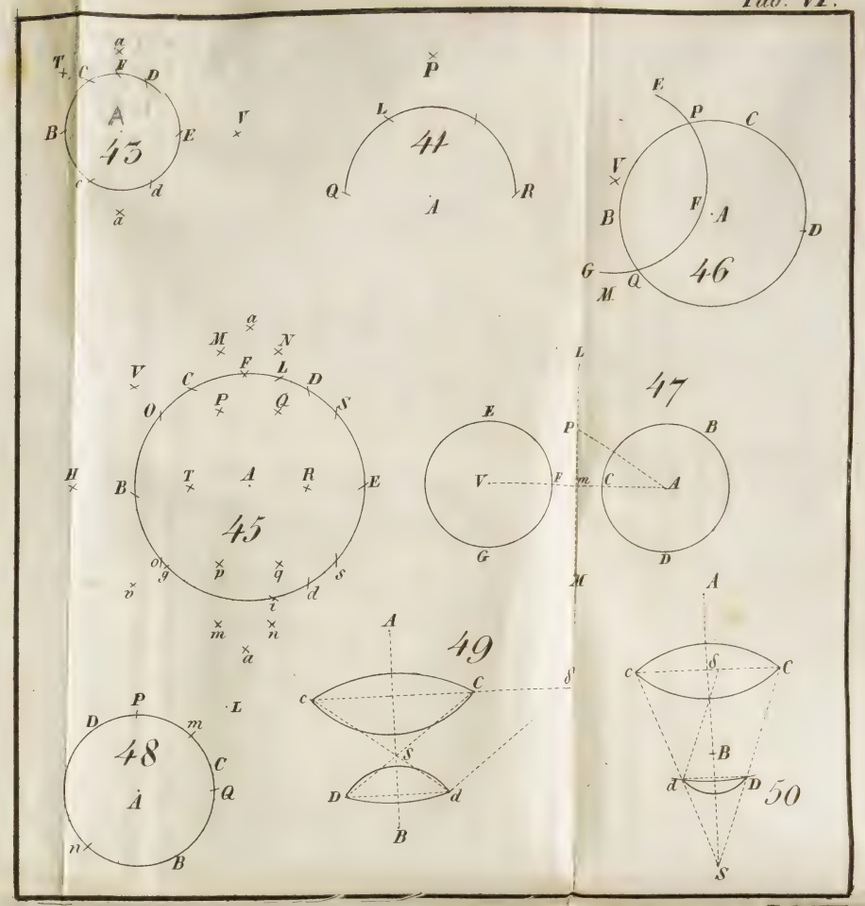

a
C
E
D
A
43
c
d
a


g
h

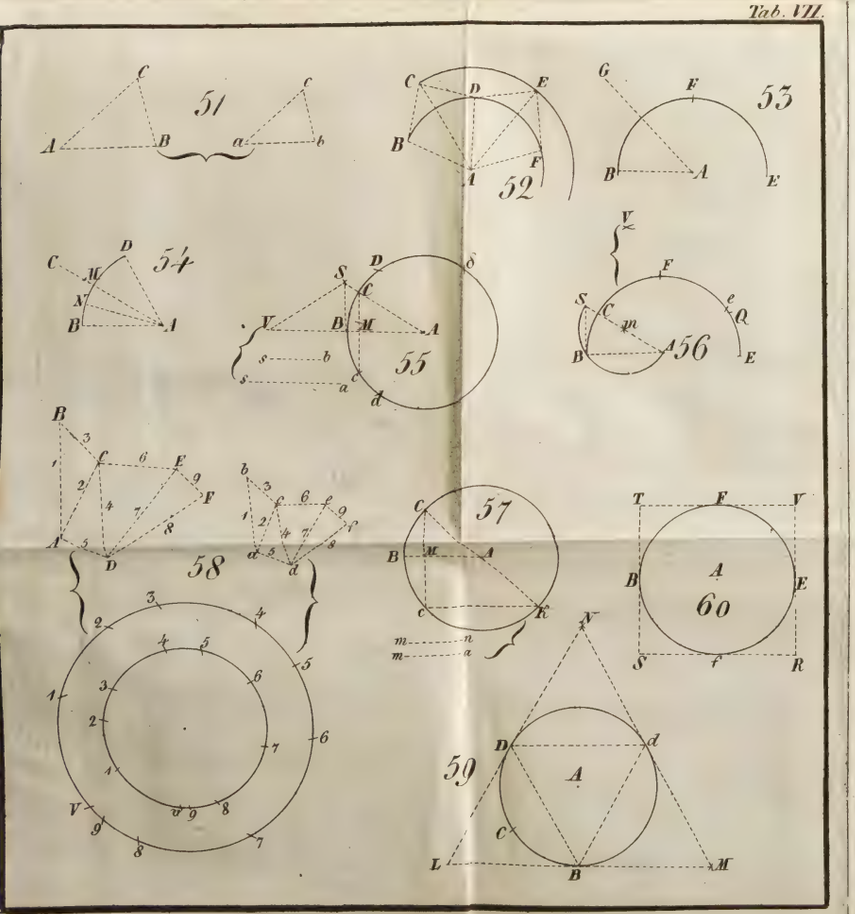
Tab. V.



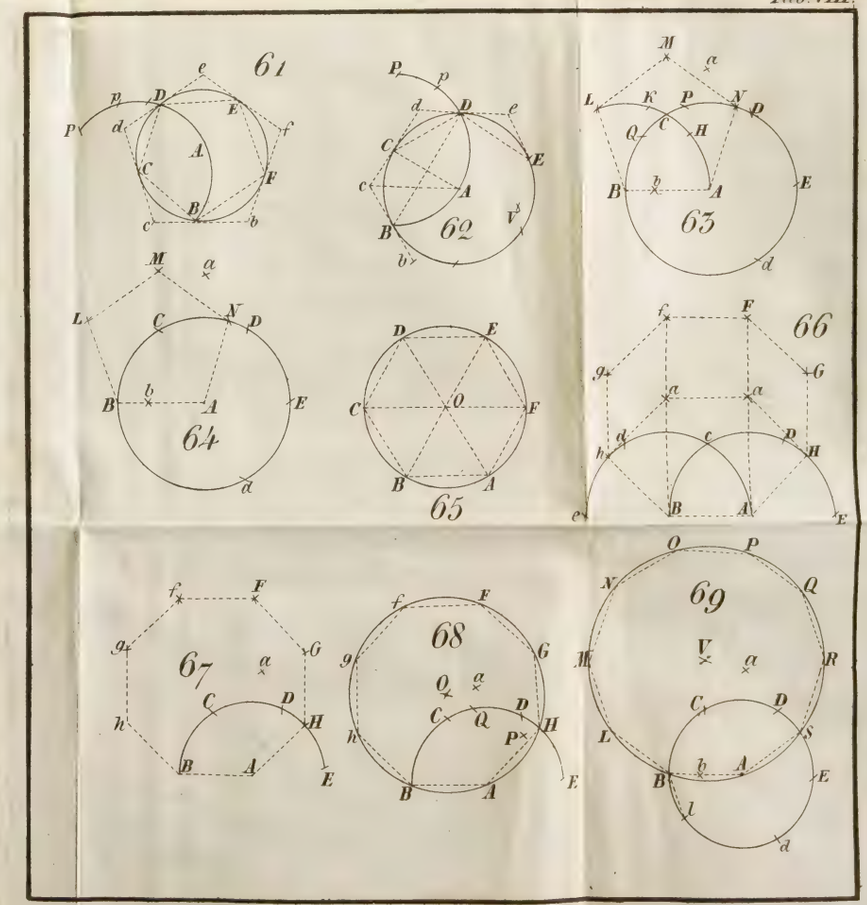
Tab. VI.

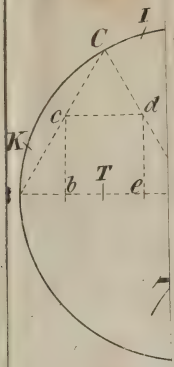


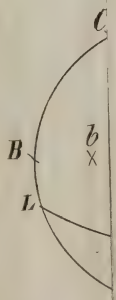
Tab. VII.



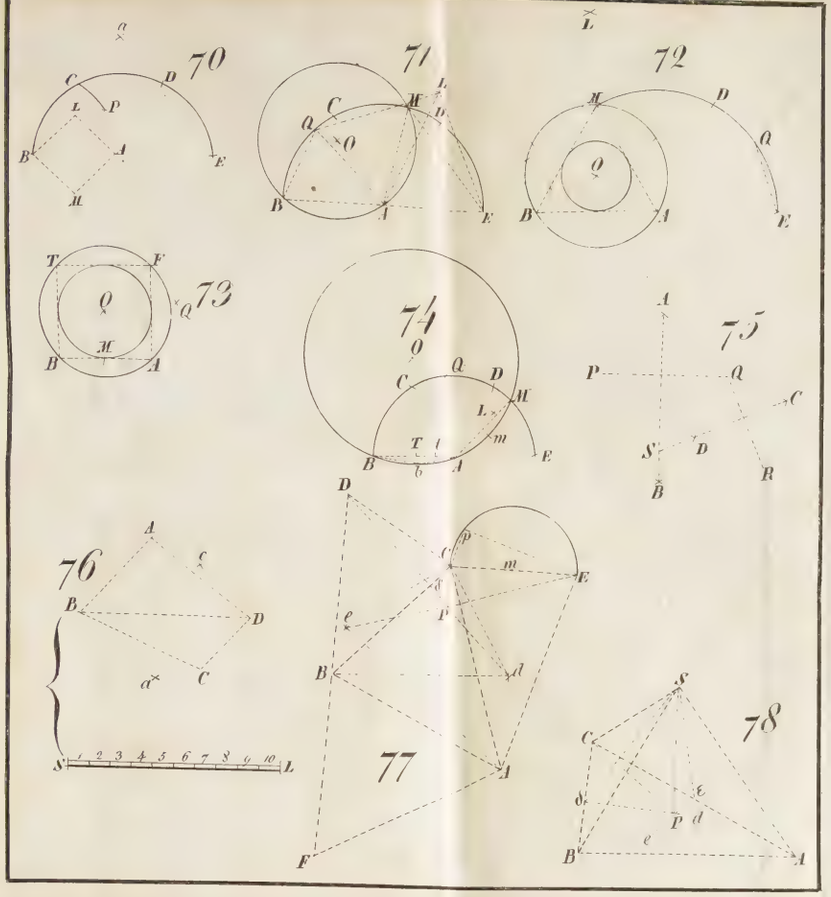
Tab. VIII.



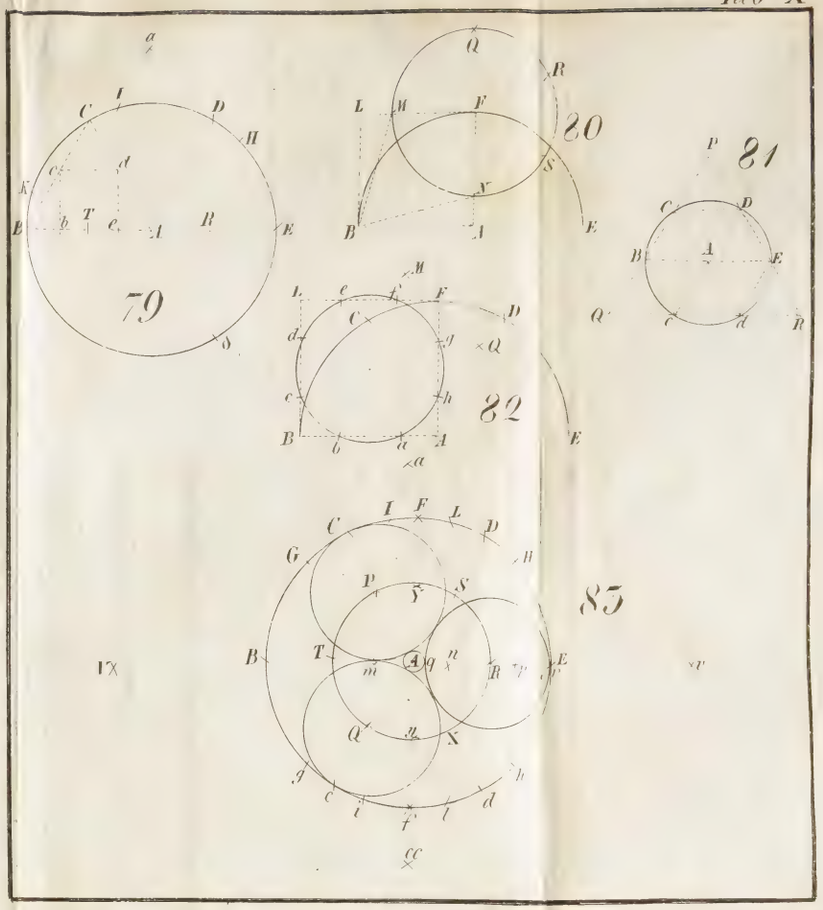

C
I
c
d
K
b
T
e


C
B
b
L

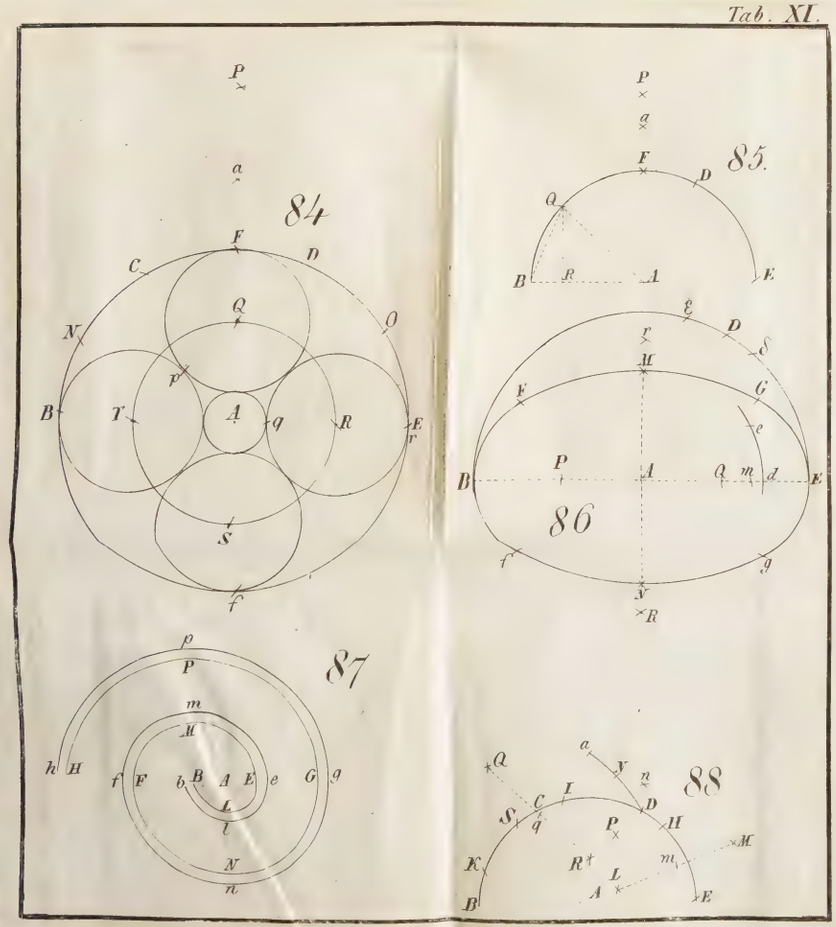
Tab. IX.



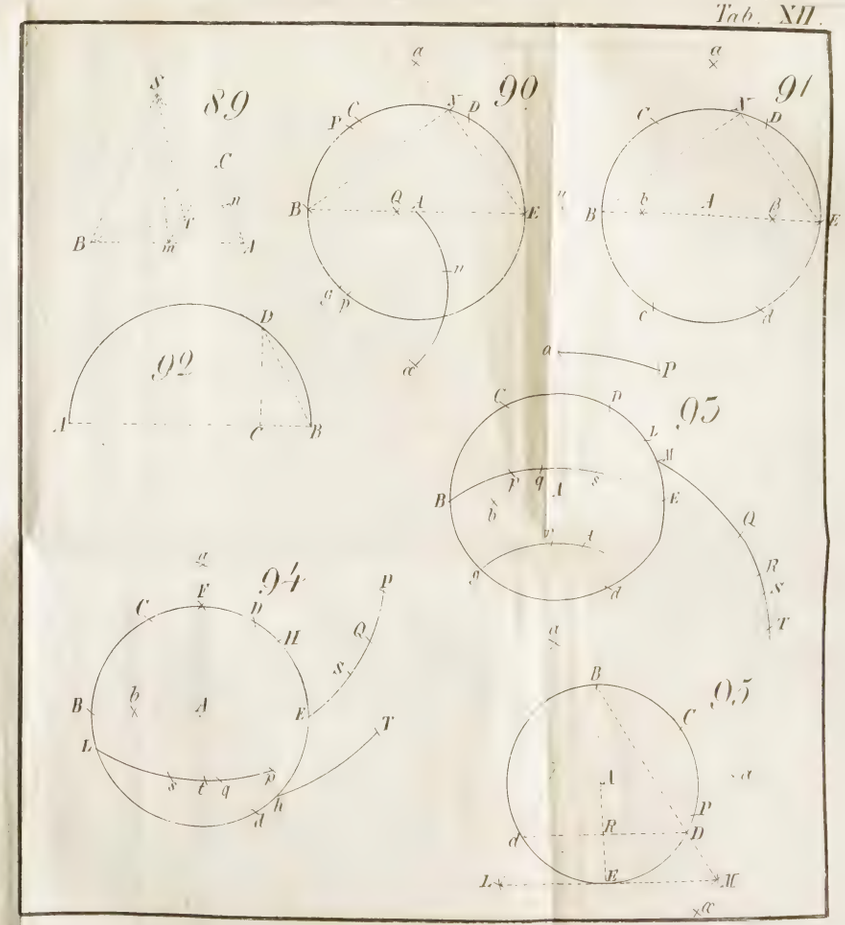
Tab. X

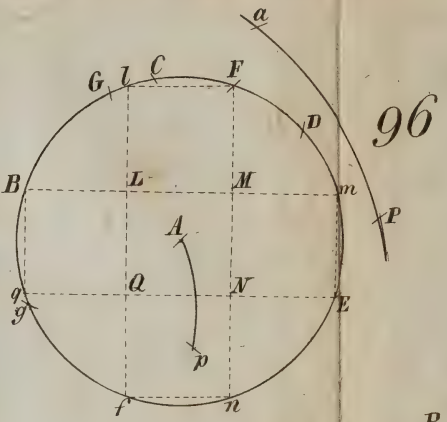


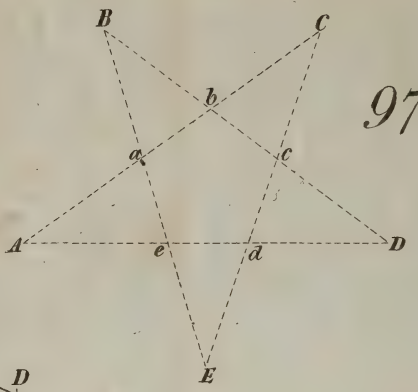
Tab. XI.

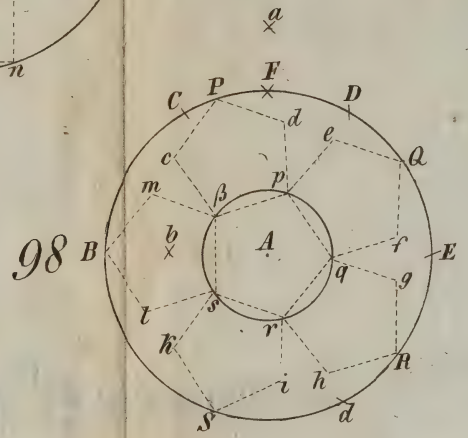


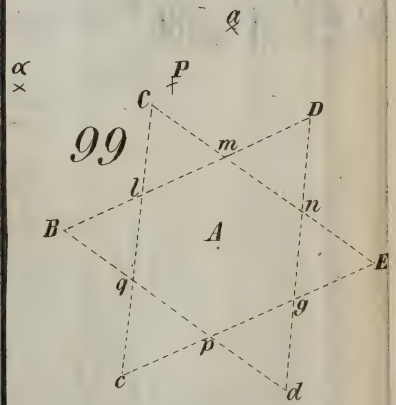
Tab. XII.

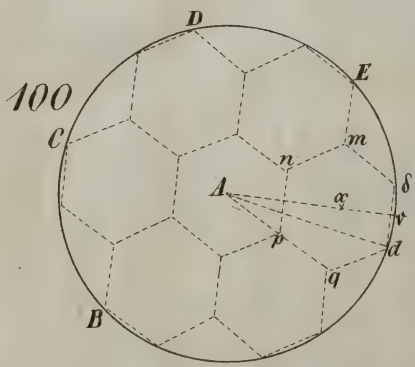


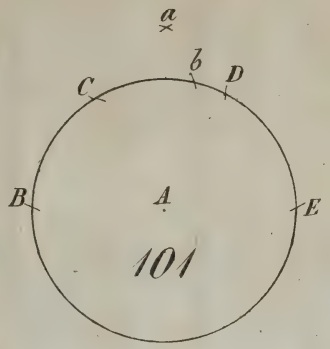

a
G
l
C
F
D
96
B
L
M
m
P
A
Q
N
E
q
g
p
f
n

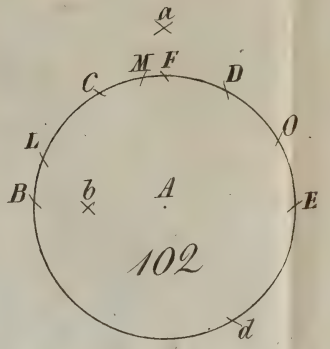

B
C
b
97
a
c
A
e
d
D
E

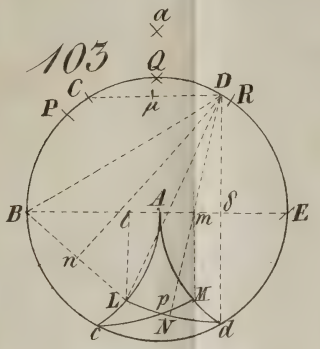

a
C
P
F
D
d
e
c
Q
p
m
β
98
B
b
A
f
E
q
g
l
s
r
k
R
h
i
S
d

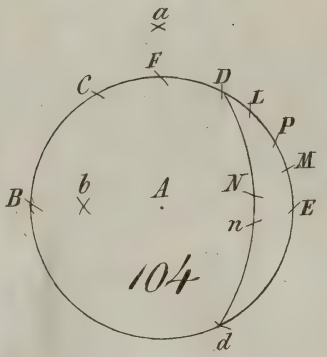

α
P
C
D
99
m
l
n
B
A
E
q
g
p
c
d

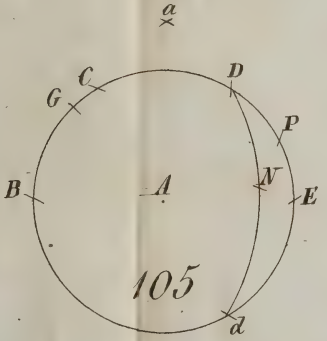

D
E
100
C
m
n
A
δ
α
v
p
d
q
B

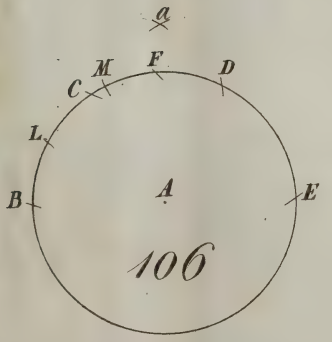

a
b
C
D
B
A
E
101

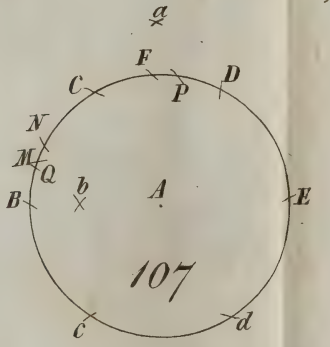

a
M
F
C
D
O
L
B
b
A
E
102
d

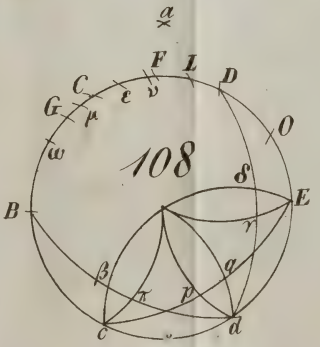

103
a
Q
C
D
R
P
μ
B
A
δ
E
l
m
n
L
p
M
c
N
d


a
F
C
D
L
P
M
B
b
A
N
E
n
104
d

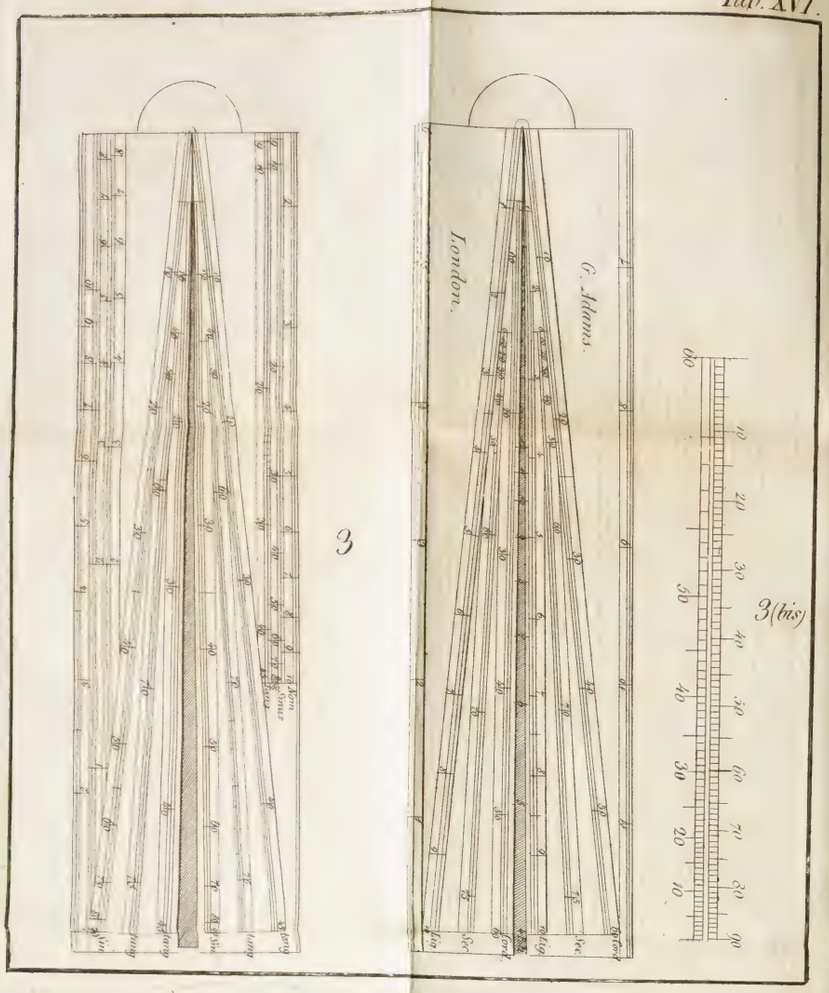

a
C
D
G
P
B
A
N
E
105
d


a
M
F
D
C
L
B
A
E
106

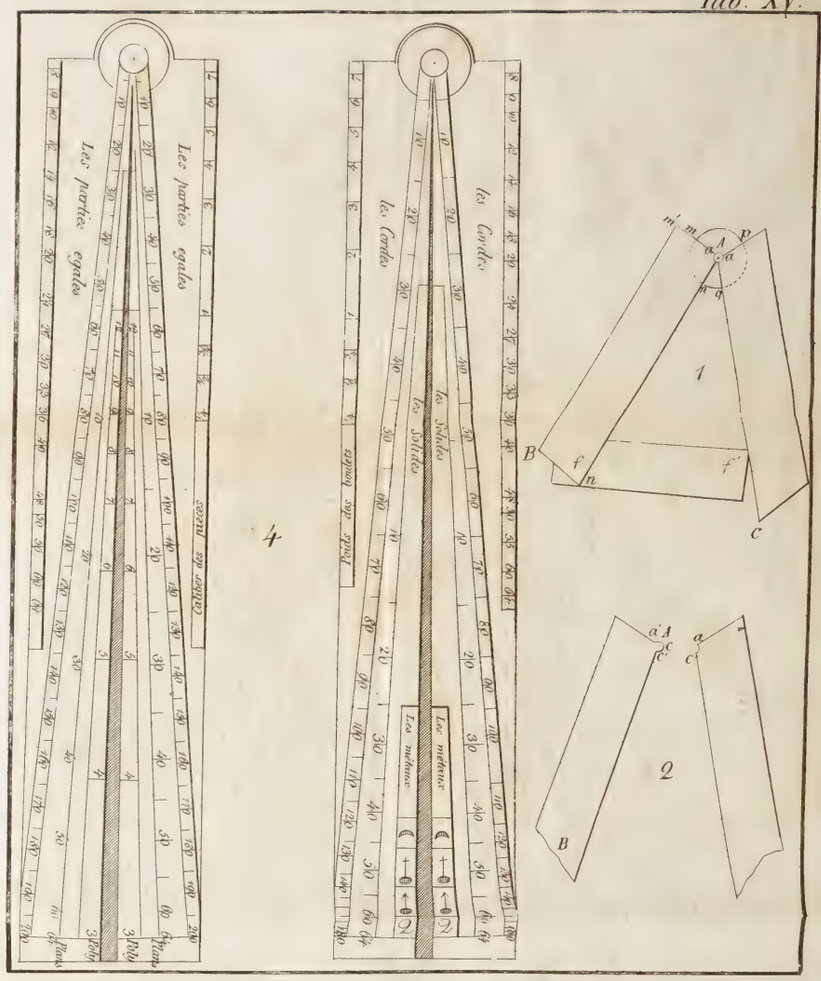

a
F
C
D
P
N
M
Q
B
b
A
E
107
c
d


a
F
L
C
D
ε
ν
G
μ
O
ω
108
δ
B
E
γ
β
α
κ
ν
c
d

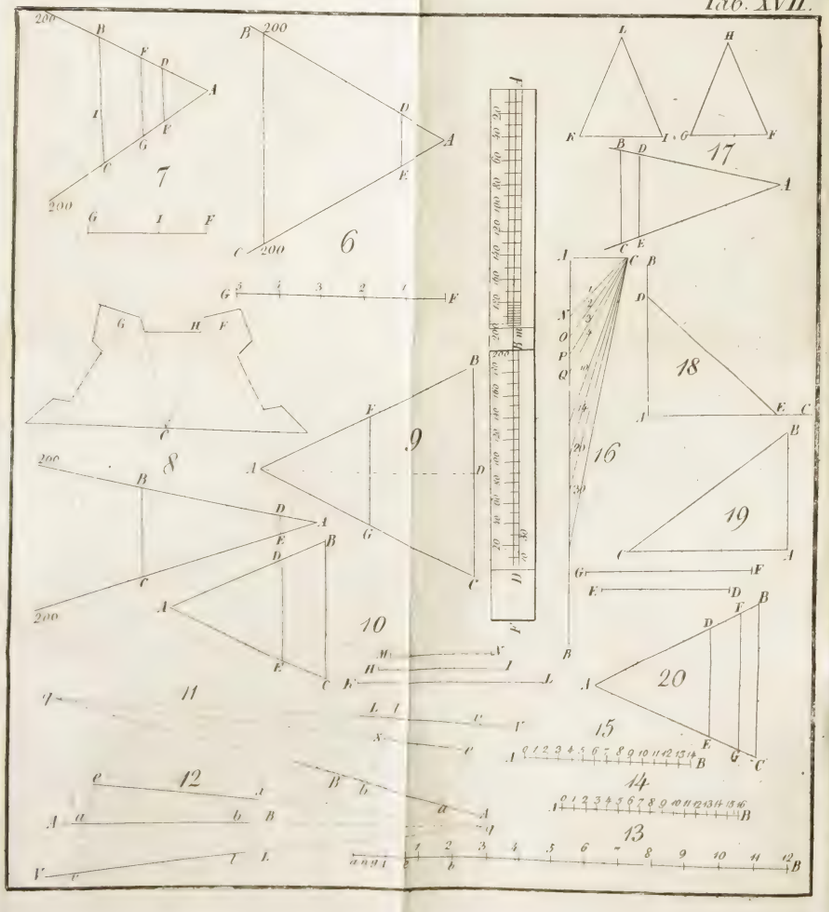
Tab. XVI.



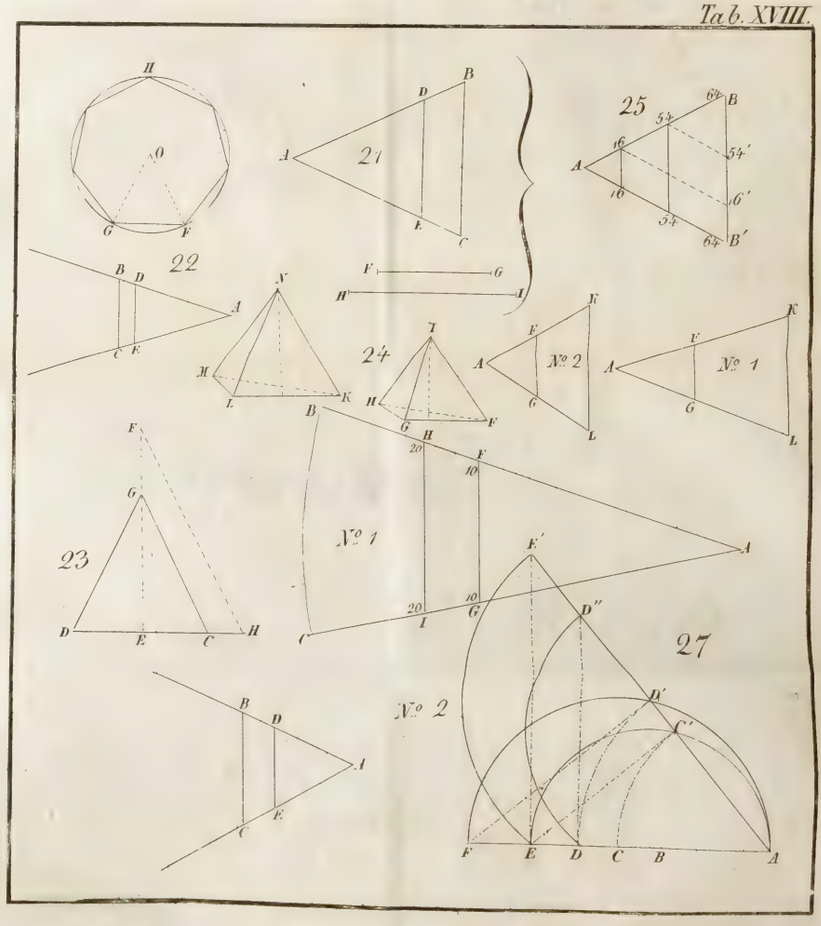
Tab. XV.

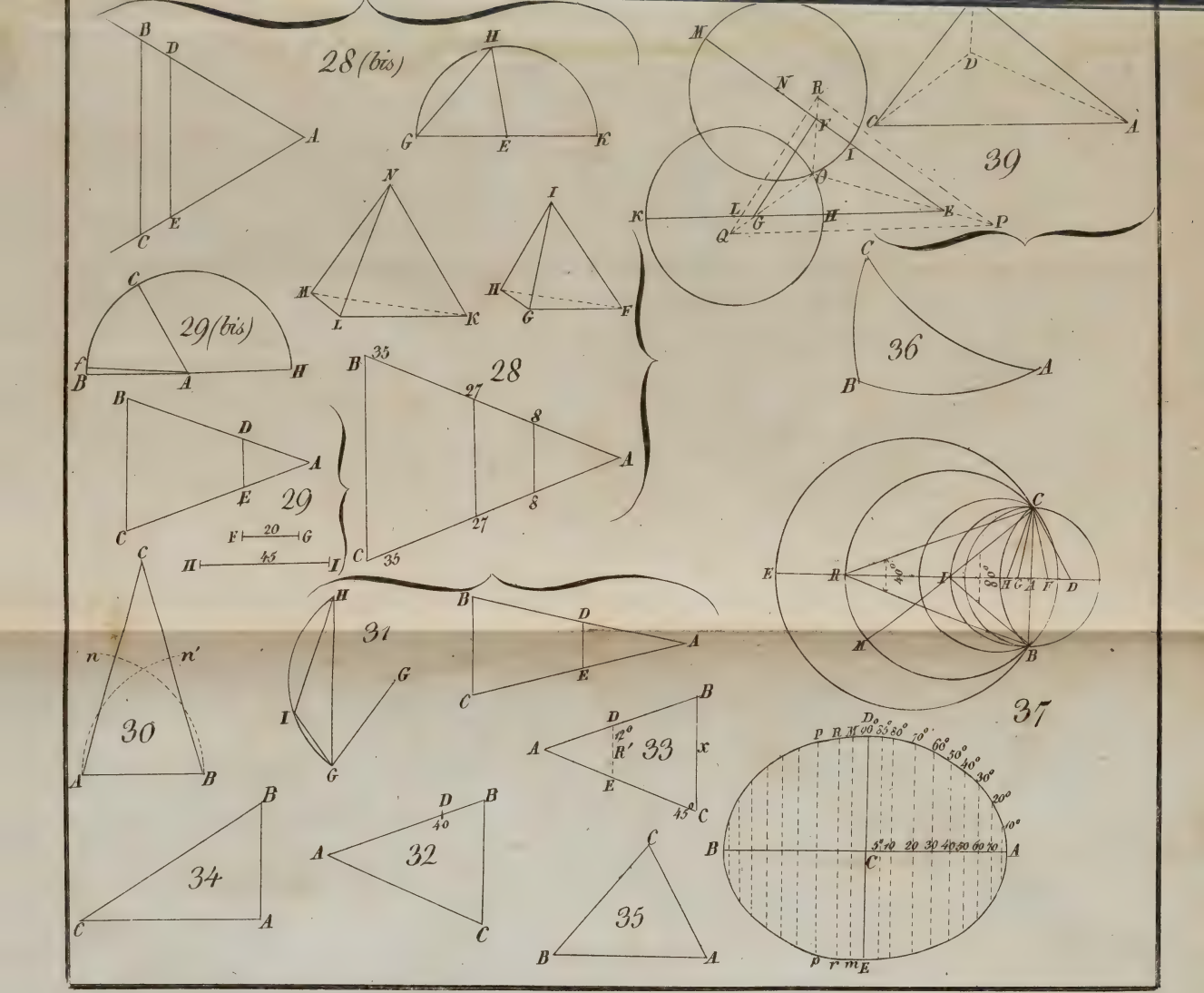


Tab. XVII.



Tab. XVIII.




28 (bis)
39
29 (bis)
28
36
29
31
37
30
33
34
32
35

OF THE
UNIVERSITY of ILLINOIS.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
516.184M37G:G1825 C001
L. MASCHERONI'S GEBRAUCH DES ZIRKELS BE
3 0112 017246205